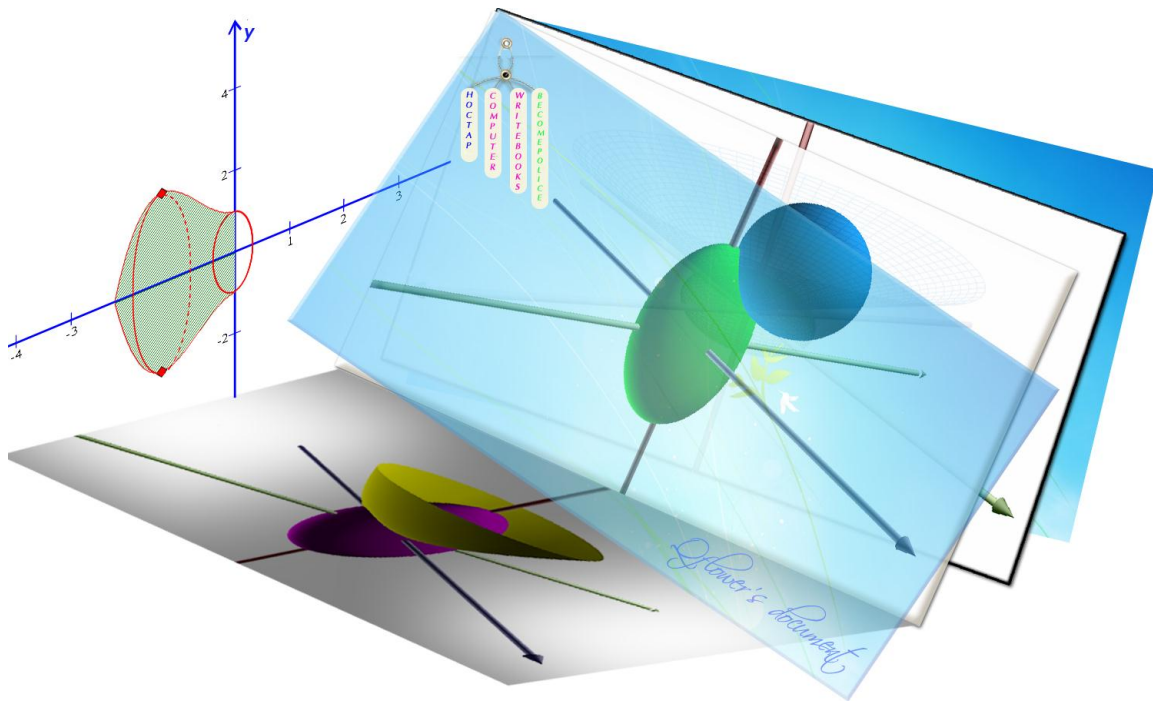


Hoàng Việt Quỳnh

Toán học phổ thông

Các phương pháp giải nhanh đề thi
đại học



Các phương pháp giải toán đại số và giải tích

Lời nói đầu:

Sau 12 năm học tập, giờ đây chỉ còn một kì thi duy nhất đang chờ đợi các em đó là kì thi đại học. Đây sẽ là kì thi khó khăn nhất trong suốt 12 năm các em ngồi trên ghế nhà trường. Kì thi đại học chính là một bước ngoặt lớn trong cuộc đời của mỗi học sinh vì thế mỗi học sinh cần phải chuẩn bị kiến thức thật toàn diện vì nội dung của đề thi mang tính liên tục. Có lẽ trong các môn, môn toán vẫn luôn chiếm vị trí quan trọng và là vật cản lớn nhất trên bước đường tiến tới giảng đường đại học. Vì thế tôi xin mạo muội góp chút kiến thức đã thu lượm được trong quá trình học tập để viết lên quyển sách này. Hy vọng đây sẽ là tài liệu bổ ích cho các em học tập.

Quyển sách được chia thành sáu đơn vị bài học và hai phụ lục. Mỗi bài đều là những phần quan trọng, xuất hiện thường xuyên trong đề thi đại học. Ở mỗi bài đều có những đặc điểm sau:

- Phần tóm tắt kiến thức đã học được trình bày ngắn gọn và tổng quát nhằm khơi lại phần kiến thức đã quên của các em.
- Hệ thống các bài làm được chọn lọc kĩ lưỡng, có tính điển hình và khai thác tối đa các góc cạnh của vấn đề nêu ra, đồng thời phương pháp giải ngắn gọn, trực quan cùng nhiều kinh nghiệm giải đề giúp các em có thể hiểu được nội dung bài giải và cách áp dụng cho các dạng đề thi sẽ gặp sau này. Đồng thời, các ví dụ đều được trình bày từ cơ bản đến nâng cao. Đây là những đề bài trích ra từ đề thi dự trữ của các năm trước và tham khảo từ những tài liệu của các thầy cô có nhiều năm kinh nghiệm trong quá trình luyện thi nên đảm bảo về mức độ và giới hạn kiến thức. Lời giải trong các ví dụ chỉ là tượng trưng nhằm mục đích nêu lên phương pháp giải, các em và các thầy cô khi tham khảo cuốn tài liệu này có thể tìm ra và trình bày cách giải và cách trình bày hợp lí hơn. Các em nên tập giải các dạng bài trên một cách thuần thục và độc lập. sau khi giải xong mới xem phần lời giải. Đó là điều mà tác giả kì vọng nhiều nhất.
- Lí giải các phương pháp, đưa ra thuật toán giải chung, đưa ra bản chất lời giải, đó là phần lời bình, lưu ý ở cuối mỗi bài tập.

Phần phụ lục là 12 đề thi tiêu biểu theo cấu trúc đề thi mới nhất do Bộ GD&ĐT công bố. Các đề thi có mức độ khó rất cao, đòi hỏi người làm phải tư duy rất nhiều. Với mức độ khó đó, tôi mong rằng khi các em giải thuần thục các bài trong bộ đề thi này các em sẽ có đủ tự tin và kiến thức để đạt điểm cao khi làm bài môn toán. Phụ lục 2 là một số mẹo để dùng máy tính đoán nghiệm cố định, phục vụ cho quá trình giải các bài tập về phương trình tích như lượng giác, hệ phương trình, phương trình, cách giải nhanh bài toán hình học bằng máy tính... Đồng thời giới thiệu thêm phương pháp chia Horner để giúp các em làm nhanh bài toán có chia đa thức, phân tích thành tích...

Với dự định là sẽ giới thiệu quyển sách cho các em trong tháng cuối cùng trước khi thi đại học nên sách đã giản lược một số phần không cần thiết và các kiến thức bên lề, chỉ giới thiệu những trọng tâm của đề thi nên bài tập có thể còn ít. Tôi cũng có lời khuyên cho các thí sinh là hãy tìm thêm các đề thi trên mạng internet vì đây là kho kiến thức vô tận.

Mặc dù rất cố gắng nhưng cuốn sách rất có thể còn nhiều thiếu sót do thời gian biên soạn ngắn đồng thời kinh nghiệm và sự hiểu biết còn hạn chế. Rất mong được sự góp ý của bạn đọc. Mọi góp ý xin liên hệ với tác giả qua địa chỉ sau:

Hoàng Việt Quỳnh

Khu 6a – Thị trấn Lộc Thắng – Bảo Lâm – Lâm Đồng

Email: vquynh2971991@yahoo.com.vn

Blog: <http://vn.myblog.yahoo.com/vquynh-qflower>

Tel: 063-3960344 - 01676897717

Bài I: Ứng dụng phương trình đường thẳng để giải phương trình căn thức.

Nhắc lại kiến thức về đường thẳng.

1) Phương trình tổng quát:

Đường thẳng đi qua $M(x_0; y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A; B)$ thì đường thẳng đó có phương trình:

$$(d): A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

$$\Leftrightarrow (d): Ax+By+C=0$$

VD1. Đường thẳng qua $M(1;2)$ nhận $\vec{n}(2;1)$ làm vectơ pháp tuyến.

$$(d): 2(x-1)+1(y-2)=0$$

$$\Leftrightarrow (d): 2x+y-4=0$$

2) Phương trình tham số:

Đường thẳng đi qua $M(x_0; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}(a_1; a_2)$

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}$$

VD2. Đường thẳng qua $M(3;4)$ nhận $\vec{a}(2;3)$ làm vtcp có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$$

VD3. Cho $(d): x+y=4$. Viết phương trình tham số của (d) .

Giải:

Vectơ pháp tuyến : $\vec{n}(1,1)$

Vectơ chỉ phương : $\vec{a}(1,-1)$

Điểm đi qua $M(2;2)$

$$\Rightarrow (d) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 - t \end{cases}$$

Ứng dụng

VD1. Giải phương trình : $\sqrt{x^3+8}+3\sqrt{12-x^3}=10$

Giải:

$$\text{Đặt: } \sqrt{x^3+8}=1+3t \quad \text{và} \quad \sqrt{12-x^3}=3-t \quad \text{Đk}(-1/3 \leq t \leq 1/3)$$

$$\Leftrightarrow x^3+8=(1+3t)^2 (*) \quad \text{và} \quad 12-x^3=(3-t)^2 (**)$$

$$\text{Lấy } (*)+(**) \text{ ta có } 20=10t^2+10 \Leftrightarrow t^2=1 \Leftrightarrow t=1 \quad \text{hoặc} \quad t=-1(\text{loại})$$

$$\Leftrightarrow x^3=8 \Leftrightarrow x=2$$

Tip:

Có phải bạn đang tự hỏi: thuật toán nào đã giúp ta nhìn thấy được cách đặt ẩn t ???

Không phải ngẫu nhiên mà tôi lại trình bày lại vấn đề đường thẳng, một vấn đề tưởng chừng như chẳng liên quan gì đến đại số. Nhưng giờ đây ta mới nhận ra được "đường thẳng" chính là "tuyệt chiêu" để giải phương trình dạng căn thức. Mấu chốt đó là:

$$B1: \underbrace{\sqrt{x^3+8}}_x + 3\sqrt[3]{\underbrace{12-x^3}_y} = 10$$

Từ đó ta có phương trình đường thẳng : $X+3Y=10$

B2: ta viết lại phương trình: $X+3Y=10$ theo tham số t

$$\begin{cases} X = 1 + 3t \\ Y = 3 - t \end{cases}$$

Lúc này phương trình đã quy về 1 ẩn t và việc giải phương trình trên là không khó. (Vì đây là kiến thức "lớp nhí")

Để hiểu rõ hơn về phương pháp này các bạn hãy cùng tôi đến với VD2.

VD2. Giải phương trình : $\underbrace{\sqrt{x+3}}_x + \sqrt[3]{\underbrace{x+2}_y} = 1$

Giải:

Gọi (d): $X=1+t$ và $Y=0+t$

$$(1) \quad \text{Đặt } \begin{cases} \sqrt{x+3} = 1-t \\ \sqrt[3]{x+2} = t \end{cases} \quad (t \leq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 1-2t+t^2 \\ x+2 = t^3 \end{cases}$$

$$\text{Lấy phương trình 2 trừ pt1 ta có: } -1 = t^3 - t^2 + 2t - 1 \Leftrightarrow t^3 - t^2 + 2t = 0$$

$$\bullet \quad T=0 \Leftrightarrow x=-2$$

Lưu ý:

Trong khi giải đề thi, các bạn nên trình bày từ bước(1) trở đi nhằm đảm bảo tính ngắn gọn cho bài toán. Bước gọi phương trình đường thẳng chỉ nên làm ngoài giấy nháp.

- Trong bài trên ta có thể đặt $\begin{cases} \sqrt{x+3} = u \\ \sqrt[3]{x+2} = v \end{cases}$ và quy về giải hệ phương trình. Các bạn có thể xem cách này như một bài tập. các bạn hãy làm và so sánh sự ưu việt giữa 2 phương pháp.
- Trong bài trên ta hạn chế phương pháp lũy thừa vì nếu muốn khử 2 căn thức khác bậc trên, ta phải ^6 phương trình. Ta sẽ gặp khó khăn và sẽ đối mặt với 1 phương trình "kinh khủng" và ta phải giải "xịt khói" mới có thể ra nghiệm.

VD3. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 & (1) \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 & (2) \end{cases} \quad (\text{đề thi ĐH năm 2005})$$

Giải:

$$\text{Đặt: } \begin{cases} \sqrt{x+1} = 2+t \\ \sqrt{y+1} = 2-t \end{cases} \quad (-2 \leq t \leq 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = t^2 + 4t + 4 \\ y+1 = t^2 - 4t + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t^2 + 4t + 3 \\ y = t^2 - 4t + 3 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình(1) trở thành: } 2t^2 + 6 - \sqrt{(t^2 + 3 + 4t)(t^2 + 3 - 4t)} = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t^4 - 10t^2 + 9} = 2t^2 + 3 \Leftrightarrow t^4 + 10t^2 + 9 = 4t^4 + 12t^2 + 9$$

$$\Leftrightarrow 3t^4 + 22t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 0 \quad \text{hoặc}$$

$$\Leftrightarrow t=0 \Leftrightarrow x=y=3$$

VD4. Định m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{x+2m} + 3\sqrt{3m-x} = 10$$

Giải:

Để phương trình có nghiệm:

$$f(x) = m$$

$$\min f(x) \leq m \leq \max f(x)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \sqrt{x+2m} = 1+3t \\ \sqrt{3m-x} = 3-t \end{cases} \quad (-1/3 \leq t \leq 3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2m = 1+6t+9t^2 \\ 3m-x = 9-6t+t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \text{cộng vế với vế} \Rightarrow 5m = 10+10t^2 \Leftrightarrow 2t^2+2=m \Leftrightarrow f(t)=m$$

Với $f(t) = 2t^2+2$ miền xác định: $D = [-1/3; 3]$

$$F'(t) = 4t \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

t	$-\infty$	$-1/3$	0	3	$+\infty$
$F'(t)$			-	0	+
$F(t)$		20/9	2	20	

$$M \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 20$$

Bài tập tự luyện

1) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ \log_5(x+y) + \log_7(x^2 - xy + y^2) = 2 \end{cases}$$

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 2 \\ \sqrt{x^2+3y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = 4 \end{cases}$$

3) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+1} = 1 \\ 3x+2y = 4 \end{cases} \quad (\text{đề thi dự bị 1A - 2005})$$

4) Giải phương trình: $\sqrt{1-\sin(x)} + \sqrt{1+\cos(x)} = 1$ (đề thi dự bị 2A - 2004)



Bài II: Các cách giải phương trình và bất phương trình vô tỉ.

Lũy Thừa

Phương pháp lũy thừa là phương pháp tổng quát nhất để giải phương trình có căn. Khi gặp các phương trình có dạng căn phức tạp nhưng khi chúng ta biết "mẹo lũy thừa" thì có thể giải bài toán một cách dễ dàng. Đây là một phương pháp cơ bản, các bạn phải thực tập nhuần nhuyễn vì phương trình trong đề thi đại học có lúc rất dễ nhưng ta lại không để ý. các bạn hãy theo dõi các ví dụ sau. Nhưng trước hết hãy lưu ý vấn đề sau:

- Đặt điều kiện
- Lũy thừa chẵn thì hai vế không âm
- Các dạng cơ bản:

$$\Leftrightarrow \sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ 0 \leq A < B^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{A} > B \Leftrightarrow \begin{cases} B < 0 \\ A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A > B^2 \end{cases}$$

VD1. $\sqrt{x} - \sqrt{10-x} = -\sqrt{5-x}$

Giải:

$$\sqrt{x} + \sqrt{5-x} = \sqrt{10-x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ 10-x \geq 0 \\ x+5-x+2\sqrt{x(5-x)} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 5 \\ 2\sqrt{5x-x^2} = 5-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 5 \\ 4(5x-x^2) = 25-10x+x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 5 \\ x^2 - 6x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \vee x=5$$

VD2. $2\sqrt{x} - \sqrt{x+3} < \sqrt{x-1}$

Giải:

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = \sqrt{x-3} + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4x < x+3+x-1+2\sqrt{(x+3)(x-1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x^2+2x-3} > x-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 + 2x - 3 > x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

VD3. $(2x - 1)\sqrt{x^2 - x + 12} \geq 6$

Giải:

Đk: $2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1/2$

Bpt $\Leftrightarrow (4x^2 - 4x + 1)(x^2 - x + 12) \geq 36$

Đặt $t = (x^2 - x)$ bpt trở thành:

$(4t + 1)(t + 12) \geq 36$

$\Leftrightarrow 4t^2 + 9t - 34 \geq 0$

$\Leftrightarrow t \leq -17/4$ hoặc $t \geq 2$

$\Leftrightarrow x^2 - x \leq -17/4$ hoặc $x^2 - x \geq 2$

$\Leftrightarrow x \leq 1$ hoặc $x \geq 2$

VD4. Giải bất phương trình : $(x^2 - x - 2)\sqrt{x - x^2} \geq 0$

Giải:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + x = 0 \\ x - x^2 > 0 \\ x^2 - x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

Lưu ý:

Ở bất phương trình trên các bạn không nên lũy thừa để tính toán vì quá trình lũy thừa và nhân phân phối rất mất thời gian. Hơn nữa, khi quy về một phương trình hệ quả, chúng ta giải rất dễ sai vì khi giao các tập nghiệm sẽ không có giá trị nào thỏa mãn.

Trong bài trên tôi sử dụng cách đánh giá theo kiểu như sau:

$$A\sqrt{B} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ B > 0 \\ A \geq 0 \end{cases} \quad \text{Đó chính là mẫu chốt của bài toán}$$

VD5. Giải phương trình : $\sqrt{x^2 - 3x + 1} + \sqrt{x^2 - 8} = 2$

Giải:

$$\sqrt{x^2 - 3x + 1} = 2 - \sqrt{x^2 - 8}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \sqrt{x^2 - 8} \geq 0 \\ x^2 - 3x + 1 = 4 - 4\sqrt{x^2 - 8} + x^2 - 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \sqrt{x^2 - 8} \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 8} = \frac{3x - 5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \left(\frac{3x-5}{4}\right) \geq 0 \\ 3x-5 \geq 0 \\ x^2 - 8 = \left(\frac{3x-5}{4}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

Lưu ý:

Trong phương trình trên các bạn phải “để ý” và “nhanh” một chút vì nếu như ta để nguyên phương trình để cho để lũy thừa thì đó là một điều “không còn gì đại bằng” ta sẽ đối mặt với chuyện lũy thừa 2 lần => một phương trình bậc 4. Phương trình này ta không thể bấm máy tính. Nhưng nếu giải tay thì phải giải “xìt khói” mới ra trong khi thời gian không chờ đợi ai. Đồng thời chúng ta không cần giải điều kiện vớ vẩn vì giám khảo chỉ quan tâm đến bài làm và kết quả. Chúng ta hãy chỉ viết “cái sườn” của điều kiện. sau khi giải ra nghiệm chỉ việc thế vào điều kiện là xong.

Phương pháp đặt ẩn phụ:

♥ CÁCH GIẢI:

$$\left. \begin{aligned} f(u(x); \sqrt[n]{u(x)}) &\geq 0 \\ f(u(x); \sqrt[n]{u(x)}) &\leq 0 \\ f(u(x); \sqrt[n]{u(x)}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad t = \sqrt[n]{u(x)} \rightarrow \text{Phương trình hữu tỉ hoặc hệ phương trình}$$

♥ BÀI TẬP ÁP DỤNG:

VD1. $3(\sqrt{(x+2)(x-1)}) = 2(x^2 + x - 3)$

Giải:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 3(\sqrt{x^2 + x - 2}) &= 2(x^2 + x - 3) & \text{Đặt } t &= \sqrt{x^2 + x - 2} \Rightarrow t > 0; t^2 + 2 = x^2 + x \\ \Leftrightarrow 3t &= 2(t^2 - 1) \\ \Leftrightarrow t &= -0.5 \text{ (loại) hoặc } t = 2 \\ \Leftrightarrow x^2 + x &= 6 & \Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = 3 \end{aligned}$$

VD2. $x - \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = 2$

Giải:

$$T = \sqrt{x-1} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 + 1 = x \end{cases}$$

Phương trình trở thành: $t^2 + 1 - \sqrt{t^2 + 2t + 1} = 2$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow t^2 + 1 - |1 + t| &= 2 \\ \Leftrightarrow t^2 + 1 - (t+1) &= 2 & \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 & \Leftrightarrow t = 2 \text{ hoặc } t = -1 \\ \Leftrightarrow x &= 5 \end{aligned}$$

VD3. $x^2 + x + (x-1)\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} = 8$

Giải:

$$t = (x-1)\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$$

$$\Leftrightarrow t^2 = (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2 \Rightarrow t^2 + 2 = x^2 + x$$

pt trở thành: $t^2 + t + 2 = 8 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = -3$

TH1: $t = 2$

$$\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x^2 + x - 2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -3 \text{ (loại)} \end{cases}$$

TH2: $t = -3$

$$\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} = -3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < 0 \\ x^2 + x - 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1-3\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{-1+3\sqrt{5}}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

♥ LOẠI II: $f(\sqrt[n]{u(x)} + \sqrt[n]{v(x)}) \{ \geq 0; \leq 0; = 0 \}$

Phương pháp chung:

$$\begin{cases} \sqrt[n]{u(x)} = u \\ \sqrt[m]{v(x)} = v \end{cases} \Rightarrow \text{Đưa về hệ phương trình.}$$

VD1. $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0$

(đề tuyển sinh đại học 2009)

Giải:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{3x-2} = u \\ \sqrt{6-5x} = v \quad (v \geq 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{3}u^3 + v^2 = \frac{8}{3} \\ 2u + 3v - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{3}u^3 + v^2 = \frac{8}{3} \\ v = \frac{8-2u}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{3}u^3 + \left(\frac{8-2u}{3}\right)^2 = \frac{8}{3} \\ v = \frac{8-2u}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+2)(15u^2 - 26u + 20) = 0 \\ v = \frac{8-2u}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = -2 \\ v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$$

LOẠI III: HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐA THỨC

Những hệ phương trình này ta rất thường hay gặp trong đề thi đại học. Ở lớp 10, ta thường gặp những phương trình có tên là hệ đối xứng, đẳng cấp... Những hệ này đã có cách giải "ăn liền". nhưng trong đề thi đại học, ta không hề tìm thấy những dạng đó. Nhưng tất cả các hệ trên đều quy về một mối đó là "Phân tích thành nhân tử".

VD1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} & (1) \\ 2y = x^3 + 1 & (2) \end{cases} \quad (\text{ĐH A 2003})$$

Giải:

ĐK: $xy \neq 0$

Ta có $(1) \Leftrightarrow (x-y)\left(1+\frac{1}{xy}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ xy = -1 \end{cases}$

TH1: $\begin{cases} x = y \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x = x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ (x-1)(x^2+x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x = y = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

TH2: $\begin{cases} xy = -1 \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{x} \\ -\frac{2}{x} = x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{x} \\ x^4 + x + 2 = 0 \end{cases}$ Mà $x^4 + x + 2 = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} > 0, \forall x \Rightarrow \text{VN}$

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = (1; 1), \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{1}; \frac{-1+\sqrt{5}}{1}\right), \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{1}; \frac{-1-\sqrt{5}}{1}\right)$

VD2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y & (1) \\ (x^2+1)(y+x-2) = y & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}). \quad (\text{Dự bị A2006})$$

Giải:

$(1) \Leftrightarrow x^2 + 1 + y(x+y-4) = 0 \quad (*)$

Đặt: $u = x^2 + 1 > 0; v = x + y - 4$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} u - yv = 0 & (3) \\ u(v+2) = y & (4) \end{cases}$ Thay (4) vào (3) ta có: $(3) \Leftrightarrow u + u(v+2).v = 0 \Leftrightarrow u[1+v(v+2)] = 0$

$\Leftrightarrow v^2 + 2v + 1 = 0 \Leftrightarrow (v+1)^2 = 0 \Leftrightarrow v = -1 \Leftrightarrow x + y = 3$

Vậy $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 - y = 0 \\ x = 3 - y \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + 1 - (3 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -2 \\ x = 2 \Rightarrow y = 5 \end{cases}$

VD3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases} \quad (*)$ ($x, y \in \mathbb{R}$). (Dự bị 2A 2006)

Giải:

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 2(4x + y) \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x^3 - y^3) = 6(4x + 2y) \quad (1) \\ x^2 - 3y^2 = 6 \quad (2) \end{cases}$ Lấy (2) thay vào (1) ta có

$\Leftrightarrow 3(x^3 - y^3) = (x^2 - 3y^2)(4x + y) \Leftrightarrow x^3 - 12y^2x + x^2y = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + xy - 12y^2) = 0$

Để thấy $x=0$ thì $y=0$. Thế vào (*) ta thấy không thỏa mãn. Vậy đây không phải là nghiệm của phương trình:

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + xy - 12y^2 = 0 \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3y)(x + 4y) = 0 \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases}$

TH1: $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 6y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 3 \\ y = -1 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$

TH2: $\begin{cases} x = -4y \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4y \\ 13y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\sqrt{78}}{13} \Rightarrow x = \frac{-4\sqrt{78}}{13} \\ y = -\frac{\sqrt{78}}{13} \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{78}}{13} \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình là:

$(x; y) = (1; 3), (-1; -3), \left(\frac{\sqrt{78}}{13}; \frac{-4\sqrt{78}}{13}\right), \left(\frac{-\sqrt{78}}{13}; \frac{4\sqrt{78}}{13}\right)$

VD4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x - y)(x^2 + y^2) = 13 \quad (1) \\ (x + y)(x^2 - y^2) = 25 \quad (2) \end{cases}$ (Dự bị 2005)

Giải:

Nhân cả 2 vế của (1) cho 25. Nhân cả 2 vế của (2) cho 13. Sau đó lấy (1)-(2).

$(1)-(2) \Leftrightarrow 13(x + y)^2(x - y) - 25(x - y)(x^2 + y^2) = 0 \Leftrightarrow (x - y)[13(x + y)^2 - 25(x^2 + y^2)] = 0$

$\Leftrightarrow (x - y)(-12x^2 + 26xy - 12y^2) = 0 \Leftrightarrow -2(x - y)(-12x^2 + 26xy - 12y^2) = 0$

Để thấy $x=y$ không thỏa mãn hệ.

$\Rightarrow \begin{cases} (3x - 2y)(2x - 3y) = 0 \\ (x + y)(x^2 - y^2) = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2y \\ 2x = 3y \\ (x + y)^2(x - y) = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 3x = 2y \\ \frac{25}{9}y^2 \cdot \left(\frac{-y}{3}\right) = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x = 3y \\ \frac{25}{4}y^2 \cdot \left(\frac{1}{2}y\right) = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \end{cases}$

Lời bình:

Làm sao ta có thể phân tích nhanh $(-12x^2 + 26xy - 12y^2)$ thành nhân tử $(3x - 2y)(2x - 3y)$??

Lúc này, công cụ của chúng ta chính là máy tính bỏ túi! Các bạn hãy làm như sau:

Coi như ta không thấy ẩn y. vậy nên ta có phương trình bậc 2 theo x: $(-12x^2 + 26x - 12) = 0$ Chắc hẳn các bạn đều biết giải phương trình bậc 2 này bằng máy CASIO. Ta bấm được nghiệm: $x = \frac{3}{2} \vee x = \frac{2}{3}$. Lúc này ta gọi lại ẩn y bằng cách thêm y vào sau các nghiệm tìm được.

$x = \frac{3}{2}y \vee x = \frac{2}{3}y$. Quy đồng bỏ mẫu vì mẫu là hằng số. ta có nhân tử cần phân tích. Lưu ý là $(-12x^2 + 26xy - 12y^2) = 0 \Leftrightarrow (3x - 2y)(2x - 3y) = 0$. Nếu giải bất phương trình, bạn nên chú ý đến dấu khi phân tích (Trường hợp này là dấu - : $(-12x^2 + 26xy - 12y^2) = -2(3x - 2y)(2x - 3y) = 0$)

⇒ Khi gặp dạng phương trình đa thức có hằng số ở phía vế phải (hoặc có thể đưa cả 2 phương trình về dạng có hằng số ở vế phải), Ta nhân cả 2 vế của phương trình trên cho số ở vế phải của phương trình dưới và nhân cả 2 vế của phương trình dưới cho số ở phương trình trên. Sau đó trừ vế theo vế. Mục đích của phương pháp này là quy hệ về phương trình tích sau đó tiến hành phân tích. Hầu hết các loại phương trình đa thức đều giải được theo cách này!

Bài tập tự luyện

Bài 1.
$$\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = 1 \end{cases}$$

Bài 2.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x(x + y + 1) + y(y + 1) = 2 \end{cases}$$

Bài 3.
$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3(x - y) \\ x^2 + xy + y^2 = 7(x - y)^2 \end{cases}$$

Bài 4.
$$\begin{cases} \log_x(x^3 + 2x^2 - 3x - 5y) = 3 \\ \log_y(y^3 + 2y^2 - 3y - 5x) = 3 \end{cases}$$

Bài 5.
$$\begin{cases} x(x + y + 1) - 3 = 0 \\ (x + y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}$$

Bài 6.
$$\begin{cases} x^9 + y^9 = 1 \\ x^{25} + y^{25} = x^{16} + y^{16} \end{cases}$$

Bài 7.
$$\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$$

Bài 8.
$$\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$$

Bài 9.
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{y} = 8 - x^3 \\ (x-1)^4 = y \end{cases}$$

Bài 10.
$$\begin{cases} 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2} \\ 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} \end{cases}$$

Bài 11.
$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases}$$



Bài III: Phương trình lượng giác.

Một số công thức lượng giác cần nhớ:

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1; 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$

2. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}; \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}; \tan x = \frac{1}{\cot x}.$

3. Công thức cộng: $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$
 $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$

4. Công thức nhân đôi: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

5. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$

6. Công thức hạ bậc: $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

7. Công thức nhân ba: $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x; \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$

8. Công thức biểu diễn theo tanx:

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}; \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}; \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

9. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) + \cos(a+b)) \\ \sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b)) \\ \sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a-b) + \sin(a+b)) \end{array} \right.$$

10. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \end{array} \right.$$

Cách giải các phương trình lượng giác trong đề thi đại học:

Lưu ý trước khi giải đề:

Các phương trình lượng giác trong đề thi đại học nhìn qua mắt học sinh thường rất khó khăn phức tạp nhưng chúng đều quy về những phương trình đơn giản. Đề thi đại học các năm đều xoay quanh biến đổi về dạng phương trình tích, đặt ẩn phụ. Năm 2009, đề thi có biến đổi hơn đó là phương trình cuối biến đổi về dạng công thức cộng. Nhìn chung phương pháp giải dạng toán này là các em học thuộc các công thức trên đây và rèn luyện kỹ năng phân tích đa thức thành nhân tử...

GIẢI MỘT SỐ ĐỀ THI TIÊU BIỂU:

1. Giải phương trình: $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 4\sin x + 1 = 0$ (1)

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x + 4\sin x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin x(\sqrt{3}\cos 2x + 2) - 2\sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x(\sqrt{3}\cos x - \sin x + 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \sqrt{3}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = -1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{-7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

2. Tìm nghiệm trên khoảng $(0; \pi)$ của phương trình :

$$4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + 2\cos^2\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$$

Giải:

Tìm nghiệm $\in (0, \pi)$

Ta có $4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + 2\cos^2\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow 2(1 - \cos x) - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + 1 + \cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$(1) \Leftrightarrow 2 - 2\cos x - \sqrt{3}\cos 2x = 2 - \sin 2x$$

$$(1) \Leftrightarrow -2\cos x = \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x. \quad \text{Chia hai vế cho 2:}$$

$$(1) \Leftrightarrow -\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \text{ (a) hay } x = -\frac{7\pi}{6} + h2\pi \text{ (b)}$$

Do $x \in (0, \pi)$ nên họ nghiệm (a) chỉ chọn $k=0, k=1$, họ nghiệm (b) chỉ chọn $h = 1$. Do đó ta có ba nghiệm x thuộc $(0, \pi)$ là $x_1 = \frac{5\pi}{18}, x_2 = \frac{17\pi}{18}, x_3 = \frac{5\pi}{6}$

3. . Giải phương trình : $2\sqrt{2}\cos^3(x - \frac{\pi}{4}) - 3\cos x - \sin x = 0$ (2)

Giải:

$$(2) \Leftrightarrow \left[\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right]^3 - 3\cos x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)^3 - 3\cos x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 x + \sin^3 x + 3\cos^2 x \sin x + 3\cos x \sin^2 x - 3\cos x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^3 x - \sin x = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 1 + 3\operatorname{tg} x + 3\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x - 3 - 3\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \text{ hay } \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ hay } x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

4. . Giải phương trình : $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + x) - 3\operatorname{tg}^2 x = \frac{\cos 2x - 1}{\cos^2 x}$ (Đề dự bị khối B 2005)

Giải:

$$(2) \Leftrightarrow -\cot x - 3\operatorname{tg}^2 x = \frac{-2\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \operatorname{tg}^2 x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^3 x = -1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ TRONG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC:

A. Đặt $t = \sin x$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$$

$$t \in [-1; 1]$$

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{t^2}{1 - t^2}$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2t^2$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x = 3t - 4t^3$$

B. Đặt $t = \cos x$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2$$

$$\cos 2x = 2t^2 - 1$$

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - t^2}{t^2}$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = 4t^3 - 3t$$

C. Đặt $t = \tan x$

$$\cot x = \frac{1}{t}$$

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\sin 2x = 2t \left(\frac{1}{1+t^2} \right)$$

$$\frac{a \sin x + b \cos x}{c \sin x + d \cos x} = \frac{a \tan x + b}{c \tan x + d} = \frac{at + b}{ct + d}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan 2x = \frac{2t}{1-t^2}$$

D. Đặt $t = \sin x \pm \cos x$

$$t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

$$\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{\pm 2}$$

$$\sin 2x = \pm (t^2 + 1)$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) = t \left(1 - \frac{t^2 - 1}{2} \right) = \frac{3 - t^3}{2}$$



NGUYÊN TẮC CHUNG ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Biến đổi: → Đặt t

→ Phân tích thành tích

Nguyên tắc :

➤ Lũy thừa → Hạ bậc

➤ Tích → Tổng

➤ Tổng → Tích

Biến đổi không được thì đổi biến.

GIẢI MỘT SỐ ĐỀ THI TIÊU BIỂU:

Bài 1. $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x$

Giải:

Đặt $t = \tan x$, pt trở thành:

$$\frac{1}{t} - 1 = \frac{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)}{1+t} + \frac{t^2}{1+t^2} - \frac{1}{2} \frac{2t}{1+t^2} \quad (t \neq 0; t \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow 2t^3 - 3t^2 + 2t - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow t = 1 \quad \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Bài 2. $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$

Giải:

Đặt $t = \cos x$, pt trở thành:

$$\Leftrightarrow 4t^3 - 3t + 2t^2 - 1 - t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \pm 1 \\ t = \frac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \pm 1 \\ \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

Bài 3. Giải phương trình: $\sqrt{1-\sin x} + \sqrt{1-\cos x} = 1$ (đề thi dự bị 2 A - 2004) (1)

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow 1 - \sin x - \cos x + 2\sqrt{(1-\sin x)(1-\cos x)} = 0$$

Đặt $t = \sin x + \cos x$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$\text{Pt trở thành: } 1 - t + 2\sqrt{1 + \frac{t^2 - 1}{2} - t} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 4 + 2t^2 - 2 - 4t \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = k\pi$$

Bài 4. $\sin x + \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} + 6 \tan^2 x (1 - \sin x) = 2$

Giải:

Đặt $t = \sin x$ $t \in [-1; 1]$

pt trở thành:

$$t + \frac{1-t^2}{1+t} + 6 \frac{t^2}{1-t^2} (1-t) = 2 \Leftrightarrow 6t^2 - t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \sin \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \arccos \frac{-1}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

Bài 5. $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4} \cos 8x$ (1)

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{1}{4} \cos 8x \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) = \frac{1}{4} \cos 8x$$

Đặt $t = \cos 4x$ $t \in [-1; 1]$ pt trở thành:

$$1 - \frac{3}{4} \left(\frac{1-t}{2} \right) = \frac{1}{4} (2t^2 - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ t = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ 4x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4} \\ x = \frac{3\pi}{16} + \frac{k\pi}{4} \end{cases}$$

Bài tập tự luyện

- $\sin 2x + \sin x - \frac{1}{2\sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = 2 \cot g 2x$
 - $\sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos \frac{3x}{2}$
 - $2 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 1 = 3(\sin x + \sqrt{3} \cos x)$
 - $\frac{\sin 2x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin x} = \operatorname{tg} x - \cot g x$
 - $(2 \cos x - 1)(\sin x + \sin 2x) - \cos 2x = \frac{1}{2}$
 - $(2 \sin x + 1)(2 \cos x - 1) = 1$
 - $\sin^3 x + \cos^3 x = \sqrt{2}(1 - \sin x \cos x)$
 - $2 \sin x \cos \frac{x}{2} - \cos x = 1$
 - $\sin^4 x + \cos^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$
 - Cho phương trình: $\frac{2 \sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2 \cos x + 3} = a$ (2) (Đề dự bị khối a 2002)
1. giải phương trình khi $a = \frac{1}{3}$
 2. tìm a để phương trình (2) có nghiệm.
- $\tan x + \cos x - \cos^2 x = \sin x \left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2}\right)$
 - $\tan^4 x + 1 = \frac{(2 - \sin^2 2x) \sin 3x}{\cos^4 x}$



Bài IV: Tích Phân

Lưu ý trước khi giải đề thi:

Tích phân là bài toán rất thường xuất hiện trong đề thi đại học. Kể từ năm 2002, khi bắt đầu tiến hành thi "Ba chung" các dạng toán tích phân và ứng dụng luôn xuất hiện và là câu 1 điểm. Bài tập phần này không quá khó nhưng vẫn phải đòi hỏi kĩ năng phán đoán, phân tích đề, và nắm rõ được các cách làm bài toán tích phân cơ bản như đổi biến số và tính theo tích phân từng phần... các em cùng theo dõi các ví dụ dưới đây.

NGUYÊN TẮC CHUNG ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN TÍCH PHÂN:

Gồm có 2 phương pháp chính:

A. ĐỔI BIẾN:

• Đổi biến loại 1:

$$f(u(x)) \cdot u'(x) dx \rightarrow \text{đặt } t=u(x)$$

Chú ý: **Các biểu thức có quan hệ đạo hàm**

GIẢI CÁC VÍ DỤ:

VD 1. Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{3 + \cos^2 x} dx$

Giải:

$$\text{Đặt } t = 3 + \cos^2 x \Rightarrow dt = 2 \cos x (-\sin x) dx \Rightarrow dt = -2 \sin 2x dx$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	4	3

$$I = \int_3^4 \frac{-dt}{t} = \ln|t| \Big|_3^4 \Rightarrow I = \ln \frac{4}{3}$$

VD2. Tính tích phân: $I = \int_2^6 \frac{dx}{2x+1+\sqrt{4x+1}}$ (Đề DB 1A – 2006)

Giải:

$$\text{Đặt } t = \sqrt{4x+1} \Rightarrow t^2 = 4x+1 \Rightarrow \frac{1}{2} t dt = dx$$

x	2	6
t	3	5

$$\int_3^5 \frac{(t+1-1)dt}{(t+1)^2} = \int_3^5 \frac{dt}{t+1} - \int_3^5 \frac{dt}{(t+1)^2} = \left[\ln|t+1| + \frac{1}{t+1} \right] \Big|_3^5 = \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{12}$$

VD3. Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1 + \tan x}}$

Giải:

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1 + \tan x} \Rightarrow t^2 = 1 + \tan x \Rightarrow 2t dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	1	$\sqrt{2}$

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t dt}{t} = 2 \int_1^{\sqrt{2}} dt = 2t \Big|_1^{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 2$$

VD 4. Tính tích phân: $I = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{3 - 2 \ln x}{x \sqrt{1 + 2 \ln x}} dx.$

Giải:

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1 + 2 \ln x} \Rightarrow t^2 = 1 + 2 \ln x \Rightarrow t dt = \frac{dx}{x}$$

x	$\sqrt{e}$	1
t	$\sqrt{2}$	1

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{3 - (t^2 - 1)}{t} t dt = \int_1^{\sqrt{2}} (4 - t^2) dt = \frac{10\sqrt{2} - 11}{3}$$

1. **Đổi biến loại 2:**

- Bậc tử lớn hơn bậc mẫu: ➔ chia đa thức
- Bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu:
 - ➔ Xét quan hệ đạo hàm ➔ Đổi biến
 - ➔ Mẫu có nghiệm ➔ Tách phân thức
 - ➔ Hàm hữu tỉ (mẫu vô nghiệm):

$$\int \frac{du}{(u(x))^2 + a^2} \quad \text{Đặt } u(x) = atant$$

- Hàm căn thức:

$$\sqrt{a^2 + (u(x))^2} \Rightarrow \text{Đặt } u(x) = atant$$

$$\sqrt{a^2 - (u(x))^2} \Rightarrow \text{Đặt } u(x) = asint \text{ (hoặc } u(x) = asint)$$

VD 5. Tính tích phân: $I = \int_0^3 \frac{dx}{x^2 + 9}$

Giải:

$$\text{Đặt } x = 3 \tan(t)$$

$$\Rightarrow dx = 3(\tan^2 t + 1) dt$$

X	0	3
t	0	$\frac{\pi}{4}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3(\tan^2 t + 1) dt}{9(\tan^2 t + 1)} = \frac{1}{3} t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{12}$$

VD 6. Tính tích phân: $I = \int_1^{\frac{5}{2}} \frac{dx}{\sqrt{9 - (x-1)^2}}$

Giải:

Đặt $x-1 = 3\sin t$
 $\Rightarrow dx = 3\cos t dt$

X	1	$\frac{5}{2}$
t	0	$\frac{\pi}{6}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{3\cos t dt}{\sqrt{9 - 9\sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t dt}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t dt}{|\cos t|} = t \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$$

VD 7. Tính tích phân: $I = \int_1^3 \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 3}}$

Giải:

Đặt $x = \sqrt{3} \tan t \Rightarrow dx = \sqrt{3}(\tan^2 t + 1) dt$

X	1	3
t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$

$$I = \int \frac{\sqrt{3}(\tan^2 t + 1)}{3\tan^2 t \sqrt{3\tan^2 t + 3}} dx = \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{1}{\cos^2 t} dt}{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}} = \frac{-1}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t dt}{\sin^2 t}$$

$$I = -\frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{3\sin t} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{9}$$

PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN:

Công thức:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (1)$$

Cách lấy phần các tích phân:

Kí hiệu $P(x)$ là đa thức. Khi gặp hai dạng nguyên hàm sau đây, ta thường dùng phương pháp tích phân từng phần:

➤ Dạng 1: $\int P(x) \ln x dx \rightarrow$ ta đặt $u = \ln x$ (Do $\ln x$ không có nguyên hàm)

➤ Dạng 2: $\int P(x) \cdot \begin{bmatrix} e^{ax+b} \\ \sin(ax+b) \\ \cos(ax+b) \end{bmatrix} dx \rightarrow$ ta đặt $u = P(x)$

Với cách ấy khi lấy công thức 1 ta sẽ được bài toán dẫn tới nguyên hàm đồng dạng với bậc của $P(x)$ thấp hơn...

GIẢI CÁC VÍ DỤ:

VD 1. Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin 2x dx.$ (đề dự bị khối D 2005)

Giải:

Đặt: $\begin{cases} u = x+1 \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin 2x dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases} \Rightarrow I = -\frac{(x+1)}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = \frac{\pi}{4} + 1$

VD 2. Tính tích phân: $I = \int_1^2 (x-2) \ln x dx.$ (đề dự bị khối D 2006)

Giải:

Đặt: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = (x-2) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} - 2x \end{cases} \Rightarrow I = \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x}{2} - 2 \right) dx = -\ln 4 + \frac{5}{4}$

VD 3. Tính tích phân: $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin \sqrt{x} dx$

Giải:

x	0	$\frac{\pi^2}{4}$
t	0	$\frac{\pi}{2}$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t dt = dx$$

$$B = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt$$

$$\text{Tính } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = t \\ dv = \sin t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = -\cos t \end{cases}$$

$$I = -t \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = -\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + 0 \cos 0 + \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$B = 2I = 2$$

$$\textbf{VD 4.} \quad \text{Tính tích phân: } A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$$

Giải:

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = e^x \\ dv = -\sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$A = -e^x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = -e^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\pi}{2} + e^0 \cos 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = 1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx \quad (1)$$

$$\text{Tính } K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$K = e^x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - A$$

$$\text{Thay vào (1): } A = 1 + e^{\frac{\pi}{2}} - A \Rightarrow 2A = 1 + e^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow A = \frac{1 + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$$

$$\textbf{VD 5.} \quad \text{Tính tích phân: } A = \int_0^{\pi} x \sin x \cos^2 x dx$$

Giải:

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x \\ dv = \sin x \cos^2 x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int \sin x \cos^2 x dx \end{cases}$$

$$\text{Tính: } v = \int \sin x \cos^2 x dx$$

$$\text{Đặt: } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$$

$$v = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$$

$$\text{Chọn } C=0 \Rightarrow v = -\frac{\cos^3 x}{3}$$

$$\text{Vậy } A = -x \frac{\cos^3 x}{3} \Big|_0^\pi + \frac{1}{3} \int_0^\pi \cos^3 x dx = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} K \quad (1)$$

$$\text{Tính } K = \int_0^\pi \cos^3 x dx = \int_0^\pi (1 - \sin^2 x) \cos x dx$$

$$\text{Đặt } t = \sin(x) \Rightarrow dt = \cos x dx$$

x	0	π
t	0	0

$$K = \int_0^0 (1 - t^2) dt = 0$$

$$\text{Thay vào (1): } A = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} K = \frac{\pi}{3}$$

VD 6. Tính tích phân: $D = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx$

Giải:

$$D = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \sin x}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \quad \text{Đặt: } \begin{cases} u = x + \sin x \\ dv = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (1 + \cos x) dx \\ v = \tan \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy: } D = (x + \sin x) \tan \frac{x}{2} \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos x) \tan \frac{x}{2} dx = \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{\sqrt{3}}{3} - K \quad (3)$$

$$\text{Với: } K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos x) \tan \frac{x}{2} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^2 \frac{x}{2} \tan \frac{x}{2} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

$$= -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}$$

Thay vào (3) ta có: $D = \frac{(9+2\sqrt{3})\pi}{18}$

Lời bình: Ở tích phân từng phần ta có cách nhớ đặt u như sau: *nhất "log" – nhì "đa" (đa thức) – tam "Lượng" (Lượng giác) – Tứ "mũ"*. Trong phép tính tích phân từng phần, gặp phép nào đứng trước trong 4 phép trên, hãy đặt u bằng phép đó!

Bài tập tự luyện

❖ Tính tích phân:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \cdot \tan x dx$$

❖ Tính tích phân:

$$I = \int_0^7 \frac{x+2}{\sqrt[3]{x+1}} dx$$

❖ Tính tích phân: $I = \int_0^e x^2 \ln x dx$

❖ Tính tích phân:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x + e^{\sin x} \cos x) dx$$

❖ Tính tích phân:

$$I = \int_0^{\pi} |\cos x| \sqrt{\sin x} dx$$

❖ Tính tích phân: $I = \int_5^{10} \frac{dx}{x - 2\sqrt{x-1}}$

❖ Tính tích phân: $I = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{3-2\ln x}{x\sqrt{1+2\ln x}} dx.$

❖ Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \sin^2 x} dx$

❖ Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx$

❖ Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P): $y = x^2 - x + 3$ và đường thẳng d: $y = 2x + 1$.

❖ Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: (C1) $y = x^2$; (C2) $y = \frac{x^2}{27}$; (C3) $y = \frac{27}{x}$

❖ Tính tích phân:

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\tan^2 x + \cot^2 x - 2} dx$$

❖ Tính tích phân:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2(1 + \cos 2x)} dx$$

❖ Tính tích phân:

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 4x \sin 3x}{\tan x + \cot 2x} dx$$

Bài V: Các bài toán liên quan đến ứng dụng của đạo hàm và đồ thị hàm số.

Lưu ý trước khi giải đề thi:

Các bài toán dạng này là câu chiếm 1 điểm, thường nằm ở câu thứ 2 sau phần khảo sát hàm số trong đề thi đại học. Muốn giải được dạng toán này ta cần nắm vững các lý thuyết về sự tăng, giảm hàm số, các vấn đề về cực trị, sự tương giao giữa hai đồ thị (điều kiện tiếp xúc của hai đường cong)... Các ví dụ dưới đây sẽ trình bày một cách có hệ thống các vấn đề nêu trên và cách giải đơn giản và dễ hiểu nhất. Các bạn tham khảo các ví dụ sau đây:

I: SỰ TĂNG GIẢM CỦA HÀM SỐ:

Nhắc lại kiến thức:

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên miền I

$f'(x) \geq 0; \forall x \in I \rightarrow$ Hàm số tăng

$f'(x) \leq 0; \forall x \in I \rightarrow$ Hàm số giảm

VD 1. Cho hàm số: $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 + m - 2)x$

Tìm m để hàm số:

- a. Tăng trên $\mathbb{R}$
- b. Giảm trên $(0; 2)$
- c. Tăng trên $(4; +\infty)$
- d. Giảm trên đoạn có độ dài bằng 2
- e. Tăng trên 2 khoảng $(-\infty; 4)$ và $(2; +\infty)$

Giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = x^2 - 2mx + m^2 + m - 2 \Rightarrow \Delta' = -m + 2$$

a. Ycbt $\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow -m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$

b. Ycbt $\Leftrightarrow \begin{cases} y'(0) \leq 0 \\ y'(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 2 \leq 0 \\ m^2 - 3m + 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 1$

Vì

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$F'(x)$		+	-	+
$F(x)$				

c. Ycbt $\Leftrightarrow$

TH1: $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow -m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$

$$\text{TH2: } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ y'(4) \geq 0 \\ \frac{S}{2} < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m^2 + 9m + 14 \geq 0 \\ m < -4 \end{cases}$$

$$\text{Vậy ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; -7) \\ m \geq 2 \end{cases}$$

$$\mathbf{d.} \text{ Ycbt} \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{\Delta}}{|a|} = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{-m+2} = 2 \Leftrightarrow -m+2=1 \Leftrightarrow m=1$$

Chú ý:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta'}}{a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta'}}{a} \Rightarrow |x_1 - x_2| = \frac{2\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

e. Ycbt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ \begin{cases} \Delta' > 0 \\ y'(4) \geq 0 \\ y'(-2) \geq 0 \\ -4 < \frac{S}{2} < 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ \begin{cases} -m+2 > 0 \\ m^2 + 9m + 14 \geq 0 \\ m^2 - 3m + 2 \geq 0 \\ -4 < m < 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ -2 \leq m \leq 1 \end{cases}$$

VD 2. Cho hàm số $y = \frac{-1}{3}x^2 + mx^2 + (m - m^2)x + \frac{m^2}{3}$ tìm m để hàm số:

- a.** Giảm trên miền xác định.
- b.** Tăng trên $(0; 2)$
- c.** Giảm trên $(6; +\infty)$
- d.** Tăng trên đoạn có độ dài bằng 2
- e.** Giảm trên 2 khoảng $(-\infty; 0)$ và $(6; +\infty)$

Giải:

MXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = -x^2 + 2mx + m - m^2$$

$$\Delta' = m$$

a. Giảm trên miền xác định.

$$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$$

b. Tăng trên $(0; 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(0) \geq 0 \\ y'(2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + m \geq 0 \\ -m^2 + 5m + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

c. Giảm trên $(6; +\infty)$

TH1: $\Delta' \leq 0 \Rightarrow m \leq 0$ (Rõ ràng vì giảm trên D cũng có nghĩa là giảm trên $(6; +\infty)$)

$$\text{TH2: } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ y'(6) \leq 0 \Leftrightarrow -m^2 + 13m - 36 \leq 0 \\ \frac{S}{2} < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 6 \end{cases}$$

$$\text{Vậy YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \in [0; 4] \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 4$$

d. Tăng trên đoạn có độ dài bằng 2

$$\Leftrightarrow |x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|} = 2 \Leftrightarrow 2m = 2 \Leftrightarrow m = 1$$

e. Giảm trên 2 khoảng $(-\infty; 0)$ và $(6; +\infty)$

TH1: (Giảm trên D):

$$\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ y'(0) \leq 0 \\ y'(6) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4 \\ 0 < \frac{S}{2} < 6 \end{cases}$$

$$\text{Tóm lại: ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m \leq 4 \end{cases}$$

II: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Nhắc lại kiến thức:

X		X_0	
Y'	+	0	-
Y			
	Cực Đại		

X		X_0	
Y'	-	0	+
Y			
	Cực Tiểu		

Bài 1: Cho (Cm) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m^2 - 1)x + m^3 - m$. Tìm m để:

- Tìm m để C có điểm cực đại nằm trên Oy
- Hàm số đạt CĐ và CT tại điểm có hoành độ < 1
- Hàm số đạt CĐ và CT tại điểm có hoành độ > -1
- Hàm số đạt CĐ và CT tại điểm có hoành độ nằm trong $[-2; 3]$
- Hàm số đạt CĐ và CT tại điểm có hoành độ dương
- Hàm số đạt CĐ và CT tại điểm có hoành độ trái dấu nhau
- Hàm số đạt CĐ và CT tại $x_1; x_2$ sao cho $(x_1^3 + x_2^3)$ nhỏ nhất

Giải:

MXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = x^2 - 2mx + 2m^2 - 1$$

$$\Delta' = -m^2 + 1$$

$$\Delta' > 0:$$

X	$-\infty$	X_1	X_2	$+\infty$
Y'		0	0	
Y		CĐ	CT	

a. Ycbt $\Leftrightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(0) = 0 \\ 0 < \frac{S}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - 1 = 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b. Ycbt :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ y'(1) > 0 \\ \frac{S}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 1 > 0 \\ 2m^2 - 2m > 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| < 1 \\ m < 0 \\ m > 1 \\ m < 1 \end{cases} \Rightarrow -1 < m < 0$$

c. Ycbt $\Leftrightarrow$ Hàm số đạt CĐ và CT tại điểm có hoành độ > -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ y'(-1) > 0 \\ \frac{S}{2} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 < 1 \\ 2m^2 + 2m > 0 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| < 1 \\ m > 0 \\ m < -1 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1$$

d. Hàm số đạt CĐ và CT tại điểm có hoành độ nằm trong $[-2; 3]$

$$\text{Ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ y'(-2) \geq 0 \\ y'(3) \geq 0 \\ -2 \leq \frac{S}{2} \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| < 1 \\ 2m^2 + 4m + 3 \geq 0 (\forall m) \\ 2m^2 - 6m + 8 \geq 0 (\forall m) \\ -2 \leq m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 1$$

e. Hàm số đạt CĐ và CT tại điểm có hoành độ dương

$$Y_{cbt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ y'(0) \geq 0 \\ 0 < \frac{S}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ 2m^2 - 1 \geq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ \left[m \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \right. \\ \left. m \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq m < 1$$

f. Hàm số đạt CĐ và CT tại điểm có hoành độ trái dấu nhau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(0) < 0 \\ \Delta' > 0 \Rightarrow |m| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{2}}{2} < m < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

g. Hàm số đạt CĐ và CT tại $x_1; x_2$ sao cho $(x_1^3 + x_2^3)$ nhỏ nhất

$$Y_{cbt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) \longrightarrow \min \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Với } \begin{cases} x_1x_2 = 2m^2 - 1 \\ x_1 + x_2 = 2m \end{cases} \quad \text{Vậy ta có (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 1 > 0 \\ P = (2m)^3 - 3(2m^2 - 1) \cdot 2m \rightarrow \min \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ P = 4m^3 + 6m \rightarrow \min \end{cases}$$

$$\Rightarrow P' = -12m^2 + 6 \Rightarrow P' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ m = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

X	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$+\infty$		
Y'			-	0	+	0	-	
Y			-2	$-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	2		

$$P_{\min} = -2\sqrt{2} \quad \text{khi } m = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

Lời bình:

Có lẽ các bạn đang thắc mắc: "Tại sao lại có những lời giải ngắn gọn và dễ dàng như vậy?" Bí quyết nằm ở biểu thức y' và dấu của nó. Lúc này, tất cả yêu cầu bài toán (y_{cbt}) liên quan đến cực trị đều nằm ẩn dưới những dấu $+$ - của y' . Và trực quan hơn nữa, ta thấy được hướng đi của mình qua bảng biến thiên. Tôi sẽ minh họa kĩ câu **d** của ví dụ trên đây:

Ycvt : Hàm số đạt CĐ và CT tại điểm có hoành độ nằm trong $[-2; 3]$

- Để có cực đại và cực tiểu $\Rightarrow y'=0$ có hai nghiệm $\Rightarrow \Delta' > 0$
- Vẽ bảng biến thiên:

X	$-\infty$	-2	X_1	$\frac{S}{2}$	X_2	3	$+\infty$
Y'		+	0	-	0	+	
Y			CĐ		CT		

Từ đó ta có $\begin{cases} y'(-2) \geq 0 \\ y'(3) \geq 0 \end{cases}$. Vậy là điều kiện thứ 2 đã được biểu hiện rất rõ ràng trên bảng biến

thiên. Đây thực ra là xét quan hệ về dấu của hệ số a: $af(\alpha)$ nhưng ở đây khi ta đã biết rõ dấu của a thì chỉ cần đặt dấu đó vào trước $f(\alpha)$ là được. Đây cũng có thể là bước rút gọn thời gian mà các em nên làm, tránh khai triển mất thời gian.

- $\frac{S}{2}$ là tổng hai nghiệm $X_1; X_2$ của phương trình $y'=0$ hay bằng $\frac{-b}{2a}$. Rõ ràng nếu $X_1; X_2$ nằm trong $[-2; 3]$ thì $\frac{S}{2}$ cũng phải nằm trong đoạn này. Vì $\frac{-b}{2a}$ là giá trị có thể rút ra dễ dàng từ phương trình gốc nên ta chọn giá trị trung bình này làm điều kiện. $\Rightarrow$ Nút thắt thứ 3 được gỡ bỏ.
- Lời khuyên đó là: khi gặp những dạng toán như trên học sinh hãy vẽ bảng biến thiên như trên ra giấy nháp sau đó tùy theo câu hỏi mà điền các thông số thích hợp vào bảng. từ đó mọi hướng giải đều được phơi bày!

Tôi có tham khảo qua một vài tài liệu của các thầy cô giáo thì thấy phần lớn các sách đều trình bày lời giải một cách máy móc, không trực quan, nhiều lúc có thể coi là lẩn quẩn. Ví dụ: tìm m để hàm số $y=f(x)$ tăng trên $(1; +\infty)$, các thầy cô trình bày trong sách cũng như trên lớp theo phương pháp Min-Max, xét nhiều trường hợp... Những cách giải đó không phải là sai tuy nhiên điều đó đôi khi làm khó các em học sinh trong quá trình tư duy tìm trường hợp, nhất là các em học sinh trung bình. Phương pháp xét dấu trình bày trên đây vừa ngắn gọn rõ ràng lại không bỏ sót trường hợp. bài toán được đơn giản hóa.

- ❖ Cách giải trên cũng áp dụng được cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ vì dạng đạo hàm

$$y' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} x^2 + 2 \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{(a'x^2 + b'x + c')^2}$$

không ta đặt thêm trường hợp. Vì mẫu thức ≥ 0 nên khi xét dấu ta chỉ cần xét dấu tử số tương tự như các ví dụ trình bày ở trên.

- ❖ Dạng hàm số này đã không còn thông dụng (chỉ giới thiệu sơ lược trong sách giáo khoa) nên xu hướng ra đề chỉ xoay quanh 3 hàm là: bậc 3, trùng phương và $y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$.

Bài 2: Cho (Cm): $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m-1)x + 4$

Định m để:

- a. C(m) có hai điểm cực trị A; B sao cho AB bằng hàng với C(1; -1)

b. C(m) có hai điểm cực trị A;B sao cho $AB = 2\sqrt{5}$

c. C(m) có hai điểm cực trị A;B sao cho AB cách đều $\Delta: y = 2$

Giải:

MXĐ: $D = \mathbb{R}$

Tọa độ 2 điểm cực trị thỏa hệ:
$$\begin{cases} y' = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$$

Vậy: $y' = x^2 - 2x - m + 1 = 0$

$$y = x^3 - 3mx^2 + 3(m-1)x + 4 \Rightarrow y = \underbrace{(x^2 - 2x - m + 1)}_0 (cx + d) + ax + b = ax + b$$

$$\Leftrightarrow y = (x^2 - 2x - m + 1)(x - 1) - 2mx - m + 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - m + 1 = 0(1) \\ y = -2mx - m + 5(2) \end{cases}$$

C(m) có hai cực trị $\Rightarrow$ (1) phải có 2 nghiệm phân biệt $\Rightarrow \Delta' \geq 0 \Rightarrow m > 0$

a. C(m) có hai điểm cực trị A;B sao cho AB thẳng hàng với C(1;-1)

(2) $\Rightarrow$ phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là $y = -2mx - m + 5$

Vì AB thẳng hàng với C(1;-1) $\Rightarrow C \in AB$ nên: $-1 = -2m \cdot 1 - m + 5 \Leftrightarrow m = 2$

Vậy với $m = 2$ AB thẳng hàng với C(1;-1)

b. C(m) có hai điểm cực trị A;B sao cho $AB = 2\sqrt{5}$

$$(1) \Rightarrow |x_2 - x_1| = \frac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|} = 2\sqrt{m}$$

$$(2) \Rightarrow |y_2 - y_1| = |-2m(x_2 - x_1)| = |-4m\sqrt{m}| \Rightarrow AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow 16m^2 + 4m = 20 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{5}{4} \end{cases} \text{ So sánh đk} \Rightarrow m = 1$$

c. C(m) có hai điểm cực trị A;B sao cho AB cách đều $\Delta: y = 2$

Ycbt $\Leftrightarrow d(A; \Delta) = d(B; \Delta)$ với $\Delta: y = 2$

$$\Leftrightarrow |y_1 - 2| = |y_2 - 2| \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 - 2 = y_2 - 2 \\ y_1 - 2 = -(y_2 - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = y_2 \\ y_1 + y_2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (-2mx_1 - m + 5) + (-2mx_2 - m + 5) = 4 \Leftrightarrow -2m(x_1 + x_2) - 2m + 10 = 4$$

$$\Leftrightarrow -2m \cdot 2 - 2m + 10 = 4 \Leftrightarrow m = 1$$

Bài 3: Cho (Cm): $y = x^3 + 3x^2 - 3(m-1)x$

Định m để:

a. C(m) có hai điểm cực trị A;B sao cho ΔOAB vuông tại O

b. C(m) có hai điểm cực trị A;B nằm khác phía với trục Ox

c. C(m) có hai điểm cực trị A;B cùng phía với trục Oy

d. C(m) có hai điểm cực trị A;B nằm cách đều đường thẳng $y = 5$

- e.** Có đường thẳng đi qua hai điểm cực trị cách gốc tọa độ một khoảng bằng 1
f. Có đường thẳng đi qua hai điểm cực trị tiếp xúc với đường tròn $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$
g. Có đường thẳng đi qua hai điểm cực trị tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân
h. Có đường thẳng đi qua hai điểm cực trị tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích = 8

Giải:

MXĐ: $D=\mathbb{R}$

Tọa độ 2 điểm cực trị thỏa hệ: $\begin{cases} y' = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y'}{3} = x^2 + 2x - m + 1 = 0 \\ y = x^3 + 3x^2 - 3(m-1)x = (x^2 + 2x - m + 1)(x+1) - 2mx + m - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - m + 1 = 0 \quad (1) \\ y = -2mx + m - 1 \quad (\Delta) \end{cases}$$

$C(m)$ có hai cực trị $\rightarrow (1)$ phải có 2 nghiệm phân biệt $\Rightarrow \Delta' \geq 0 \Rightarrow m > 0$ (*)

a. $C(m)$ có hai điểm cực trị A;B sao cho $\triangle OAB$ vuông tại O

Ycbt $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \text{ với } \begin{cases} \overrightarrow{OA} = (x_A; y_A) \\ \overrightarrow{OB} = (x_B; y_B) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + (-2mx_1 + m - 1)(-2mx_2 + m - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 + 4m^2x_1x_2 + (-2m^2 + 2m)(x_1 + x_2) + (m-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (-m+1) + 4m^2(-m+1) + (-2m^2 + 2m) \cdot -2 + (m-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4m^3 + 9m^2 - 7m + 2 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(-4m^2 + 5m - 2)}_{\text{VN vì } \Delta = -7} (m-1) = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ (thỏa điều kiện(*))}$$

b. $C(m)$ có hai điểm cực trị A;B nằm khác phía với trục Ox

Ycbt $\Leftrightarrow y_1 \cdot y_2 < 0 \Leftrightarrow (-2mx_1 + m - 1)(-2mx_2 + m - 1) < 0$

$$\Leftrightarrow 4m^2x_1x_2 + (-2m^2 + 2m)(x_1 + x_2) + (m-1)^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2(-m+1) - 2(-2m^2 + 2m) + (m-1)^2 < 0$$

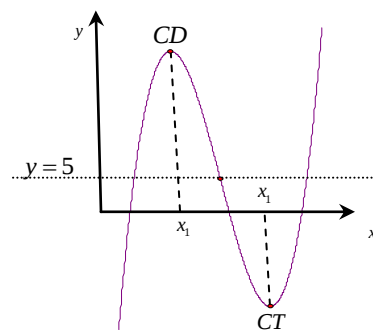
$$\Leftrightarrow -4m^3 + 9m^2 - 6m + 1 < 0 \Leftrightarrow \underbrace{(-4m+1)(m-1)^2}_{\geq 0} < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{4} \\ m \neq 1 \end{cases}$$

c. $C(m)$ có hai điểm cực trị A;B cùng phía với trục Oy

Ycbt $\Leftrightarrow x_1x_2 > 0$ (x_1 cùng dấu với x_2) $\Leftrightarrow -m+1 > 0 \Leftrightarrow m < 1$

d. $C(m)$ có hai điểm cực trị A;B nằm cách đều đường thẳng $y=5$



Ycvt : $\rightarrow y=5$ cắt (Cm) tại trung điểm AB. M là trung điểm AB có tọa độ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; -2mx+m-1\right)$

$$\Rightarrow M(-1; 3m-1) \quad Ycvt \Leftrightarrow 5=3m-1 \Leftrightarrow m=2$$

So sánh với điều kiện (*) ta thấy $m=2$ là kết quả cần tìm.

e. Có đường thẳng đi qua hai điểm cực trị cách gốc tọa độ một khoảng bằng 1

$$\Delta: y = -2mx + m - 1 \Leftrightarrow \Delta: 2mx + y - m + 1 = 0$$

$$Ycvt \Leftrightarrow d(O; \Delta) = 1 \Leftrightarrow \frac{|2m \cdot 0 + 0 - m + 1|}{\sqrt{(2m)^2 + 1^2}} = 1 \Leftrightarrow (-m+1)^2 = (2m)^2 + 1^2 \Leftrightarrow 3m^2 + 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -\frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{So sánh với điều kiện } m > 0 \text{ ta nhận thấy không có giá trị } m \text{ thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

f. Có đường thẳng đi qua hai điểm cực trị tiếp xúc với đường tròn $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$

$$Ycvt \Leftrightarrow d(I; \Delta) = R \text{ với tâm } I(1;1) \text{ và } R=2$$

$$\Delta: 2mx + y + m - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{|2m \cdot 1 + 1 - m + 1|}{\sqrt{(2m)^2 + 1}} = 2 \Leftrightarrow (m+2)^2 = 16m^2 + 4 \Leftrightarrow -15m^2 + 4m = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{4}{15} \end{cases} \quad \text{So sánh với (*) ta nhận } m = \frac{4}{15}$$

g. Có đường thẳng đi qua hai điểm cực trị tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân

$$\text{Gọi M là giao điểm của } \Delta \text{ và Ox: } \Rightarrow \begin{cases} -2mx + m - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{m-1}{2m}; 0\right)$$

$$\text{Gọi N là giao điểm của } \Delta \text{ và Oy: } \Rightarrow \begin{cases} y = -2m \cdot 0 + m - 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow N(0; m-1)$$

$$Ycvt \Leftrightarrow |x_M| = |y_N| \Leftrightarrow \left|\frac{m-1}{2m}\right| = |m-1| \Leftrightarrow \left(\frac{1}{|2m|} - 1\right) \cdot |m-1| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{1}{2} \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Để thấy với $m=1$, Δ đi qua gốc tọa độ, với $m = -\frac{1}{2}$ không thỏa (*) nên loại. Vậy ta chọn $m = \frac{1}{2}$

h. Có đường thẳng đi qua hai điểm cực trị tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích = 8

$$Ycvt: \Leftrightarrow S_{\Delta OMN} = \frac{1}{2} OM \cdot ON \Leftrightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{2} |x_M| |y_N|$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = \left| \frac{m-1}{2m} \right| \cdot |m-1| \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{(m-1)^2}{|2m|} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 1 = \frac{m}{2} \\ m^2 - 2m + 1 = \frac{-m}{2} \quad (VN) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$$

So sánh (*) vậy có hai giá trị m thỏa mãn: m=2 và m=0.5

III: SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA HAI ĐỒ THỊ

Nhắc lại kiến thức:

Cho: $C_1: y = f(x)$; $C_2: y = g(x)$

Số giao điểm của C_1 và C_2 là số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm:

$$f(x) = g(x)$$

Đặc biệt khi C_1 tiếp xúc C_2 :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

Lưu ý: Không được sử dụng điều kiện nghiệm kép để làm dạng toán tiếp xúc của hai đồ thị.

Để hiểu rõ hơn, ta hãy đến với các ví dụ sau:

Bài 1: Cho hàm số $(C_m): y = \frac{2mx-3m-2}{x-1}$ ($m \neq -2$) và $(d): y = x-1$

Định m để (d) cắt (C_m) tại hai điểm phân biệt:

a) Có hoành độ lớn hơn -1

b) Có hoành độ nhỏ hơn 2

c) Có hoành độ nằm trong khoảng $[-2; 3]$

d) Có hoành độ dương

e) Có hoành độ trái dấu.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm giữa (C_m) và d :

$$\frac{2mx-3m-2}{x-1} = x-1 \Leftrightarrow g(x): x^2 - 2(m+1)x + 3m+3 = 0$$

x	$-\infty$	x_1	$\frac{S}{2}$	x_2	$+\infty$	
$g(x)$		+	0	-	0	+

Để (d) cắt (C_m) tại hai điểm phân biệt $\rightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $\rightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -1 \end{cases} \\ g(1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2 \end{cases} \quad (*)$

a) Có hoành độ lớn hơn -1

$$Y_{cbt}: \Leftrightarrow \begin{cases} g(-1) > 0 \\ -1 < \frac{S}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2(m+1)+3m+3 > 0 \\ m+1 > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{6}{5} \\ m > -2 \end{cases}$$

So sánh với (*) ta kết luận: $\begin{cases} -\frac{6}{5} < m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$

b) Có hoành độ nhỏ hơn 2

$$\begin{cases} g(2) > 0 \\ \frac{S}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-4(m+1)+3m+3 > 0 \\ m+1 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+3 < 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m < 1 \end{cases}$$

So sánh với (*) ta kết luận: $\begin{cases} m < -2 \\ -2 < m < -1 \end{cases}$

c) Có hoành độ nằm trong khoảng $[-2; 3]$

$$\text{Ycbt: } \begin{cases} g(-2) \geq 0 \\ g(3) \geq 0 \\ -2 \leq \frac{S}{2} \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 4(m+1) + 3m + 3 \geq 0 \\ 9 - 6(m+1) + 3m + 3 \geq 0 \\ -2 \leq m+1 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{11}{7} \\ m \leq 2 \\ -3 \leq m \leq 2 \end{cases}$$

So sánh điều kiện (*) ta suy ra: $-\frac{11}{7} \leq m \leq -1$

d) Có hoành độ dương

$$\text{Ycbt: } \Leftrightarrow \begin{cases} g(0) > 0 \\ 0 \leq \frac{S}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 3 > 0 \Leftrightarrow m > -1 \\ m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1 \end{cases}$$

So sánh với (*) ta suy ra: $m > 2$

e) Có hoành độ trái dấu.

$$\text{Ycbt: } g(0) < 0 \Leftrightarrow 3m + 3 < 0 \Leftrightarrow m < -1$$

$$\text{So sánh điều kiện (*)} \Rightarrow m \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1)$$

Bài 2: Cho hàm số (C): $y = \frac{x+1}{x-1}$ và (d): $y = mx + 1$

Tìm m để d cắt (C):

a) Tại 2 điểm phân biệt nằm trên 2 nhánh của đồ thị.

b) Tại 2 điểm phân biệt nằm trên cùng 1 nhánh của đồ thị

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$\frac{x+1}{x-1} = mx + 1 \quad (x \neq 1) \Leftrightarrow g(x) = mx^2 - mx - 2 = 0 \quad (1)$$

a) Tại 2 điểm phân biệt nằm trên 2 nhánh của đồ thị. (Hình 1)

Ycbt: phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa $x_1 < 1 < x_2$

x	$-\infty$	x_1	1	x_2	$+\infty$
			<i>tiệm cận đứng</i>		
$g(x)$	Cùng dấu m	0	Trái dấu m	0	Cùng dấu m

$$\Leftrightarrow m.g(1) < 0 \Leftrightarrow m(m - m - 2) < 0 \Leftrightarrow -2m < 0 \Leftrightarrow m > 0$$

Lưu ý: Trường hợp này không cần phải xét biệt thức Δ vì khi d cắt C về 2 phía của tiệm cận đứng $x=1$ thì mặc nhiên phương trình đã có 2 nghiệm, không cần thiết phải xét Δ

b) Tại 2 điểm phân biệt nằm trên cùng 1 nhánh của đồ thị (Hình 2)

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa:

$$\begin{cases} x_1 < x_2 < 1 \\ 1 < x_1 < x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ m.g(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 8m < 0 \\ -2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 0 \\ m < -8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m < -8$$

Bài 3: Viết phương trình đường thẳng cắt đồ thị :

(C): $y = x^3 - 3x + 2$ tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho $x_A = 2$ và

$$BC = 2\sqrt{2}.$$

Giải: (hình 3)

$$x_A = 2 \Rightarrow y_A = 4$$

Phương trình đường thẳng qua A(2;4) là $\Delta: y = k(x - x_A) + y_A \Rightarrow \Delta: y$

Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Δ :

$$x^3 - 3x + 2 = k(x - 2) + 4 \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = k(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - (k+3)x + 2k - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x - k + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ g(x) = x^2 + 2x - k + 1 \end{cases}$$

Điều kiện để có BC:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ 4 + 4 - k + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k \neq 9 \end{cases} \quad \text{Khi đó tọa độ } B(x_1; y_1); C(x_2; y_2) \text{ thỏa}$$

hệ:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - k + 1 = 0 & (1) \\ y = kx - 2k + 4 & (2) \end{cases}$$

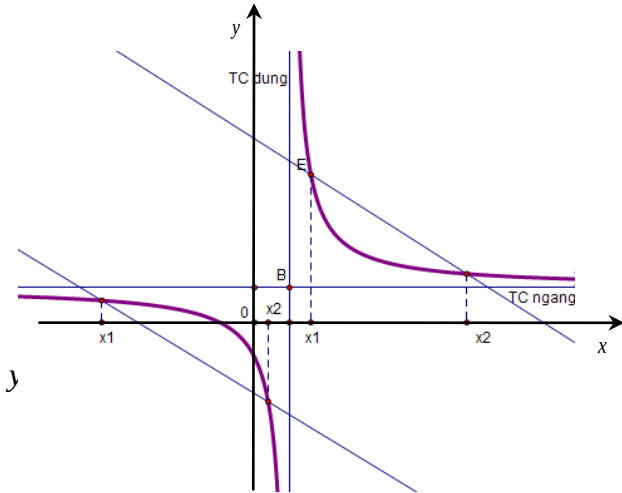
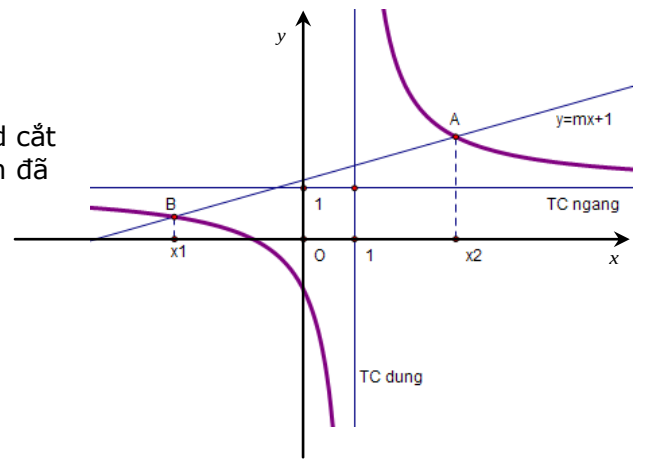
$$(1) \Leftrightarrow |x_2 - x_1| = \frac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|} = 2\sqrt{k}$$

$$(2) \Leftrightarrow |y_2 - y_1| = |k(x_2 - x_1)| = 2k\sqrt{k}$$

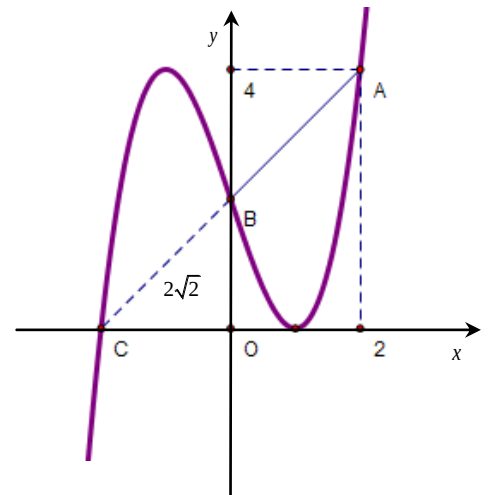
$$|BC| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4k + 4k^3} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 4k^3 + 4k - 8 = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

$$\text{Vậy } \Delta: y = 1(x - 2) + 4$$



Hình 2



Hình 3

Bài 3: Cho (C) $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Tìm trên đường thẳng (d): $y = -2$ những điểm mà từ đó có thể vẽ được đến (C) :

- a. Ba tiếp tuyến phân biệt
- b. Ba tiếp tuyến phân biệt trong đó có 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau

Giải:

- a. Ba tiếp tuyến phân biệt

Xét $A(a; -2) \in d : y = -2$.

Phương trình đường thẳng Δ qua $A(a; -2)$ và có hệ số góc :

$$y = k(x - a) - 2 \quad (\Delta).$$

Δ tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$ Hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = k(x - a) - 2 & (1) \\ 3x^2 - 6x = k & (2) \end{cases}$$

Thay k từ (2) vào 1 ta được:

$$x^3 - 3x^2 + 2 = (3x^2 - 6x)(x - a) - 2 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)[2x^3 - (3a-1)x + 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ g(x) = 2x^3 - (3a-1)x + 2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Từ A kẻ được ba tiếp tuyến phân biệt đến (C)

$\Leftrightarrow$ phương trình (3) có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (4) có 2 nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta g > 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3a-1)^2 - 16 > 0 \\ 2 \cdot 2^2 - (3a-1) \cdot 2 + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -1 \vee a > \frac{5}{3} \\ a \neq 2 \end{cases} \quad (*)$$

- b. Ba tiếp tuyến phân biệt trong đó có 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau

Khi đó phương trình (3) có 3 nghiệm phân biệt:

$x_0 = 2$; x_1, x_2 (với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $g(x) = 0$) và 3 tiếp tuyến ứng với hệ số góc là:

$$k_0 = f'(2) = 0; \quad k_1 = f'(x_1) = 3x_1^2 - 6x_1; \quad k_2 = f'(x_2) = 3x_2^2 - 6x_2$$

Vì $k_0 = 0$ nên : Ycbt $\Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$.

$$\Leftrightarrow (3x_1^2 - 6x_1)(3x_2^2 - 6x_2) = -1 \Leftrightarrow 9[x_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 4x_1 x_2] = -1 \quad (**)$$

Áp dụng định lí Viet cho phương trình (4) ta có:

$$x_1 + x_2 = \frac{3a-1}{2} \quad \text{và} \quad x_1 x_2 = 1$$

$$\text{Do đó } (**) \Leftrightarrow 9 \left[1 - 2 \left(\frac{3a-1}{2} \right) + 4 \right] = -1 \Leftrightarrow a = \frac{55}{27} \quad (\text{thỏa điều kiện } (*)).$$

Vậy điểm cần tìm là $A\left(\frac{55}{27}; -2\right)$.

DẠNG TOÁN: HỌ ĐƯỜNG CONG TIẾP XÚC VỚI MỘT ĐƯỜNG CỐ ĐỊNH

Phương pháp:

Dạng 1: Cho họ đường cong $(C_m): y=f(x;m)$. chứng minh (C_m) luôn tiếp xúc với một đường (C) cố định .

◇ TH1:

$(C_m): y=f(x;m)$. là hàm đa thức.

Đưa : $y = f(x;m)$ về dạng: $y = \pm(ax+bm)^n + g(x)$ ($n: \text{nguyên} \geq 2$).

Xét đường cong $(C): y = g(x)$ và chứng minh hệ:

$$\begin{cases} \pm(ax+bm)^n + g(x) = g(x) \\ \pm na(ax+bm)^{n-1} + g'(x) = g'(x) \end{cases} \quad \text{Có nghiệm } \forall m$$

◇ TH2:

$(C_m): y=f(x;m)$. là hàm hữu tỉ: (Dạng tổng quát)

(Δ) tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow$ hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} ax+b+\frac{c}{x+d} = k(x-x_0)+y_0 & (1) \\ a-\frac{c}{(x+d)^2} = k & (2) \end{cases}$$

Giải hệ trên qua 3 bước:

B1: nhân 2 vế của phương trình (2) cho: $x+d$

$$ax+ad-\frac{c}{x+d} = k(x+d) \quad (3)$$

B2: (1)-(3):

$$b-ad+\frac{2c}{x+d} = k(-x_0-d)+y_0 \Leftrightarrow \frac{2c}{x+d} = k(-x_0-d)+y_0+ad+b \quad (4)$$

B3: Thay (4) vào (2) sẽ có 1 phương trình theo k. giải phương trình này và tìm m sao cho phương trình đúng $\forall m$.

Lưu ý: cách giải trên có thể áp dụng đối với hàm số $\frac{ax+b}{cx+d}$

Dạng 2: Tìm điều kiện để họ đường cong tiếp xúc với 1 đường cố định:
Dùng điều kiện tiếp xúc.

II/ Một số ví dụ:

Bài 1: Cho $(C_m): y = x^3 + 2x^2 + (2m+1)x + m^2 + 2$. Chứng minh rằng (C_m) luôn tiếp xúc với một đường cong cố định.

Giải:

Ta có: $(C_m): y = x^3 + 2x^2 + (2m+1)x + m^2 + 2 \Leftrightarrow (x+m)^2 + x^3 + x^2 + x + 2$

Xét đường cong $(C): y = x^3 + x^2 + x + 2$

(C_m) luôn tiếp xúc với (C) : hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} (x+m)^2 + x^3 + x^2 + x + 2 = x^3 + x^2 + x + 2 \\ 2(x+m) + 3x^2 + 2x + 1 = 3x^2 + 2x + 1 \end{cases} \quad (1)$$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+m)^2 = 0 \\ 2(x+m) = 0 \end{cases}$ Rõ ràng với mọi m , hệ (1) luôn có nghiệm $x = -m$

Vậy $\forall m$, (C_m) luôn tiếp xúc với 1 đường cong cố định: $(C): y = x^3 + x^2 + x + 2$.

Bài 2:

Cho $(C_m): y = \frac{(m-2)x - (m^2 - 2m + 4)}{x-m}$. Chứng minh (C_m) luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định.

Giải:

$$(C_m): y = \frac{(m-2)x - (m^2 - 2m + 4)}{x-m} \Leftrightarrow y = (m-2) - \frac{4}{x-m}$$

(C_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng $(\Delta): y = ax + b$

$\Leftrightarrow$ Hệ phương trình sau có nghiệm $\forall m$:

$$\begin{cases} (m-2) - \frac{4}{x-m} = ax + b & (1) \\ \frac{4}{(x-m)^2} = a & (2) \end{cases} \quad (I)$$

♦ Nhân 2 vế của phương trình (2) cho: $x-m$

$$\Rightarrow \frac{4}{x-m} = a(x-m) \quad (3)$$

♦ Lấy (1)-(3):

$$\Leftrightarrow (m-2) - \frac{8}{x-m} = b + am \Leftrightarrow \frac{-8}{x-m} = (a-1)m + b + 2 \quad (4)$$

♦ Thay (4) vào (2):

$$\Leftrightarrow [(a-1)m + (b+2)]^2 = 16a$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 m^2 + 2(a-1)(b+2)m + (b+2)^2 - 16a = 0 \quad (*)$$

Hệ (1) có nghiệm $\forall m \Leftrightarrow (*)$ đúng $\forall m$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 = 0 \\ 2(a-1)(b+2) = 0 \\ (b+2)^2 - 16a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \vee b = -6 \end{cases}$$

Vậy (C_m) luôn tiếp xúc với 2 đường thẳng cố định $y = x + 2$ và $y = x - 6$

CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN CHU VI VÀ DIỆN TÍCH

Kiến thức cần nhớ:

❖ Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_a; y_a); B(x_b; y_b)$

$$AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

❖ Cho $M(x_0; y_0)$ và $(\Delta): Ax + By + c = 0$

Ta có: $d(M, (\Delta)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

❖ Đặc biệt: $d(M; Ox) = |y_0|$; $d(M; Oy) = |x_0|$

❖ Cho ΔABC :

▪ $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$

▪ Nếu: $\overrightarrow{AB} = (a_1; a_2)$

$$\overrightarrow{AC} = (a_1; a_2)$$

$$\text{Thì: } S_{ABC} = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix}$$

▪ Chu vi $\Delta ABC = AB + AC + BC$

II/ Một số ví dụ:

Bài 1: Tìm kiếm tất cả các điểm trên (C): $y = \frac{x-2}{x-1}$ cách đều 2 điểm $A(0;0)$ và $B(2;2)$

Giải:

$$(C): y = \frac{x-2}{x-1}$$

$$M(x_0; y_0) \in (C) \Leftrightarrow y_0 = \frac{x_0 - 2}{x_0 - 1}$$

M cách đều A và B

$$\Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow AM^2 = BM^2$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = (x_0 - 2)^2 + (y_0 - 2)^2$$

$$\Leftrightarrow x_0 + y_0 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0 - 2 + \frac{x_0 - 2}{x_0 - 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 2)(x_0 - 1) + x_0 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0; & y_0 = 2 \\ x_0 = 2; & y_0 = 0 \end{cases}$$

Vậy hai điểm cần tìm là $M_1(0;2); M_2(2;0)$

Bài 2: Cho hàm số: $y = \frac{2x+1}{x+1}$

Tìm m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt A; B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\sqrt{3}$ (O là gốc tọa độ)

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x+1} = -2x + m$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = (x+1)(-2x+m) \text{ (do } x=-1 \text{ không phải là nghiệm của phương trình)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (4-m)x + 1 - m = 0 \quad (1)$$

$\Delta = m^2 + 8 > 0 \quad \forall m \Rightarrow y = -2x + m$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi m

$$S_{OAB} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} |x_A y_B - x_B y_A| = \sqrt{3} \Leftrightarrow |x_A (-2x_B + m) - x_B (-2x_A + m)| = 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow |m(x_A - x_B)| = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow m^2 (x_A - x_B)^2 = 12 \Leftrightarrow m^2 \cdot \frac{m^2 + 8}{4} = 12$$

$$\Leftrightarrow m^4 + 8m^2 - 48 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

Cách 2: Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x+1} = -2x + m$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = (x+1)(-2x+m) \text{ (do } x=-1 \text{ không phải là nghiệm của phương trình)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (4-m)x + 1 - m = 0 \quad (1)$$

$\Delta = m^2 + 8 > 0 \quad \forall m \Rightarrow y = -2x + m$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi m

Ta có : $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ trong đó $x_1; x_2$ là các nghiệm của (1) $y_1 = -2x_1 + m; y_2 = -2x_2 + m$

$$d(O, AB) = \frac{|m|}{\sqrt{5}} \text{ và } AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{5(x_1 + x_2)^2 - 20x_1x_2} = \frac{\sqrt{5(m^2 + 8)}}{2}$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} AB \cdot d(O, AB) = \frac{|m|\sqrt{m^2 + 8}}{4} \Rightarrow \frac{|m|\sqrt{m^2 + 8}}{4} = \sqrt{3} \Leftrightarrow m = \pm 2$$

Lời bình: Trong các đề thi trước, ta chỉ gặp dạng toán có tham số m ở đồ thị gốc (đồ thị cho khảo sát). Nhưng chỉ cần một sự thay đổi nhỏ trong cách ra đề như bài trên cũng khiến không ít học sinh lúng túng. Các bạn chỉ rập khuôn phương pháp đó là quy về định lý Viet khi xét phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị, kết quả dẫn đến lời giải lằng nhằng, rắc rối không lối thoát... Qua bài trên ta suy ra được rằng, khi gặp bài toán liên quan đến diện tích mà tham số không nằm ở đồ thị gốc, ta có thể

ngay nghĩ đến hướng dùng công thức: $S_{ABC} = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix}$

Bài tập tự luyện

1. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + 2(m^2 + m)x - \frac{1}{3}$. Định m để hàm số:

- a) Tăng trên R
- b) Giảm trên (0;1)

Bài VI: Một số dạng toán khác cần lưu ý.

I/ Giới hạn:

Dạng toán này đã từng xuất hiện trong đề thi đại học từ rất lâu (năm 2002 – 2003) Tuy nhiên đã rất lâu không thấy xuất hiện trong đề thi đại học. Tuy nhiên ta cũng nên chú ý đến dạng toán này.

Ở đây tôi xin trình bày phương pháp tổng quát để làm bài dạng này là "Gọi số hạng vắng bằng hệ số bất định".

Bài 1. Tìm $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^3} - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$

Giải:

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^3} - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{5-x^3}-2}{x^2-1} - \frac{\sqrt[3]{x^2+7}-2}{x^2-1} \right) \quad (1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^3}-2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^3}{(x^2-1)(\sqrt{5-x^3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x^2+x+1)}{(x+1)(\sqrt{5-x^3}+2)} = \frac{-3}{8} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2+7}-2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{(x^2-1)\left(\sqrt[3]{(x^2+7)^2} + 2\sqrt[3]{x^2+7} + 4\right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+7)^2} + 2\sqrt[3]{x^2+7} + 4} = \frac{1}{12} \quad (3)$$

Thay (2),(3) vào (1) có: $A = \frac{-3}{8} - \frac{1}{12} = \frac{11}{24}$

Lưu ý:

Trong lời giải ta đã thêm số 2 vào tử thức f(x). Có lẽ bạn đang tự hỏi:

- Tại sao phải thêm số 2 ?
- Làm cách nào để nhận ra số 2 ?

Số 2 là hạng tử đã bị xóa! Muốn làm dạng bài này, ta phải khôi phục nó. Muốn khôi phục số 2 này ta làm như sau:

B1: $\forall c \in \mathbb{R}$ luôn có: $f(x) = \left(\frac{\sqrt{5-x^3}-c}{x^2-1} - \frac{\sqrt[3]{x^2+7}-c}{x^2-1} \right)$

B2: Trong các số c đó. Ta tìm số c sao cho x^2-1 có cùng nhân tử chung với $f_1(x) = \sqrt{5-x^3}-c$ và $f_2(x) = \sqrt[3]{x^2+7}-c$. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi c là nghiệm của tuyến:

$$\begin{cases} f_1(1)=0 \\ f_2(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ c=\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow c=2 \quad \text{Đó chính là lí do tại sao 2 xuất hiện trong bài giải.}$$

Đây là việc nên làm trong giấy nháp. Không nhất thiết trình bày trong bài làm.
Qua ví dụ trên ta nêu lên thuật toán sau:

Giả sử $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ có giới hạn $\frac{0}{0}$

B1: Phân tích $f(x) = \frac{f_1(x)+c}{g(x)} + \frac{f_2(x)-c}{g(x)}$.

B2: (Tìm c): Gọi $\alpha_i (i=1; 2; \dots)$ là nghiệm của hệ $g(x)=0$

Khi đó c là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} f_1(\alpha_i) + c = 0 \\ f_1(\alpha_i) - c = 0 \end{cases} \quad (i=1; 2; \dots)$$

Với c tìm được thì $\lim_{x \rightarrow \alpha_i} \frac{f_1(x)+c}{g(x)}$ và $\lim_{x \rightarrow \alpha_i} \frac{f_2(x)-c}{g(x)}$ sẽ hoặc là dạng xác định hoặc là dạng quen thuộc.

Sau khi tìm c, việc trình bày lời giải như đã làm.

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{3x^2-1} + \sqrt{2x^2+1}}{1 - \cos x} \quad (\text{đề dự bị 2002})$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$$

II/Phương trình và bất phương trình mũ và logarit:

Đây là dạng toán cũng rất thường xuyên xuất hiện trong đề thi. Nhìn chung, dạng toán này không khó. Tất cả các phép biến đổi chỉ xoay quanh các công thức đã nêu trong sách giáo khoa. ở phần này, tôi không nêu lại các công thức trên. Xin trình bày cách giải của 1 số đề thi gần đây.

Bài làm qua 2 bước:

B1: Đặt điều kiện. (Nếu điều kiện quá phức tạp thì có thể đến bước 2 rồi thử nghiệm vào điều kiện)

B2: Biến đổi phương trình hay bất phương trình về dạng đơn giản cùng cơ số ở cả 2 vế:

- Mũ: Chia

- Logarit: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

$$\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} \log_a x$$

- Đặt ẩn phụ: $t = \log_a f(x) \Rightarrow$ phương trình hữu tỷ hoặc phương trình mũ

$$t = a^{f(x)} \Rightarrow \text{phương trình hữu tỷ.}$$

- Phương pháp hàm số

Bài 1. $81.4^{2x^2-3x+1} - 78.6^{2x^2-3x+1} + 16.9^{2x^2-3x+1} \leq 0 \quad (1)$

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow 81 - 78 \left(\frac{6}{4}\right)^{2x^2-3x+1} + 16 \left(\frac{9}{4}\right)^{2x^2-3x+1} \leq 0 \Leftrightarrow 81 - 78 \left(\frac{3}{2}\right)^{2x^2-3x+1} + 16 \left(\frac{3}{2}\right)^{2(2x^2-3x+1)} \leq 0$$

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x^2-3x+1}$ Đk: $t > 0$

$$\text{Phương trình trở thành: } 16t^2 - 78t + 81 \leq 0 \Leftrightarrow t \in \left[\frac{3}{2}; \frac{27}{8} \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq \left(\frac{3}{2} \right)^{2x^2-3x+1} \leq \frac{27}{8} \Leftrightarrow 1 \leq 2x^2 - 3x + 1 \leq 3$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 \geq 1 \\ 2x^2 - 3x + 1 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x \geq 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq 0 \\ x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Bài 2. Giải bất phương trình: $e^{x+\sqrt{x-1}} - e^{1+\sqrt{x-1}} \leq x-1$

Giải:

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x + \sqrt{x-1} \\ v = 1 + \sqrt{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow u - v = x - 1$$

$$\text{Phương trình trở thành: } e^u - e^v = u - v$$

$$\Leftrightarrow f(u) \leq f(v)$$

$$\text{Với } f(x) = e^x - x; \quad x \geq 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^x + 1 > 0 \Rightarrow f(x) \text{ tăng.}$$

$$\text{Do đó } u \leq v \Leftrightarrow x + \sqrt{x-1} \leq 1 + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x \leq 1$$

Bài 3. Giải phương trình: $\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 x$

Giải:

$$\text{Đặt } \log_3 x = t \Leftrightarrow x = 3^t$$

$$\text{Do đó: } \log_2(1 + \sqrt{x}) = t \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x} = 2^t \Leftrightarrow 1 + (\sqrt{3})^t = 2^t$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^t + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^t = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^t + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^t = \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow f(t) = f(2) \Leftrightarrow t = 2 \quad (\text{Vì } f(x) = \left(\frac{1}{2} \right)^x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^x \text{ là hàm giảm})$$

$$\Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x = 9$$

Bài 4. Giải bất phương trình: $\log_x [\log_2 (4^{x+1} - 8)] \geq 1 \quad (1)$

Giải:

$$\text{ĐK: } 4^{x+1} - 8 > 0 \Leftrightarrow 2^{2(x+1)} > 2^3 \Leftrightarrow 2(x+1) > 3 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}$$

$$(1) \Leftrightarrow \log_x [\log_2 (4^{x+1} - 8)] \geq \log_x x \Leftrightarrow \log_2 (4^{x+1} - 8) \geq x \Leftrightarrow \log_2 (4^{x+1} - 8) \geq \log_2 2^x$$

$$\Leftrightarrow 4^{x-1} - 8 \geq 2^x \Leftrightarrow \frac{4^x}{4} - 2^x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \leq 0 \text{ (loại)} \\ 2^x \geq 8 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3$$

Bài 5. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 & (1) \\ 3\log_9(9x^2) - \log_3 y^3 = 3 & (2) \end{cases} \quad (\text{ĐH A 2005})$$

Giải:

$$\text{Đk: } \begin{cases} x \geq 1 \\ 0 < y \leq 2 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow 3(1 + \log_3 x) - 3\log_3 y = 3 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 y \Leftrightarrow x = y$$

Thay $x=y$ vào (1) ta có:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 1 \Leftrightarrow x-1+2-x+2\sqrt{(x-1)(2-x)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(2-x)} = 0 \Leftrightarrow x=1, x=2$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x;y)=(1;1)$ và $(x;y)=(2;2)$

Bài 6. Giải phương trình:
$$\log_4(x-1) + \frac{1}{\log_{2x+1} 4} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x+2} \quad (1) \quad (\text{Dự bị 1A - 2007})$$

Giải:

ĐK: $x > 1$

$$(1) \Leftrightarrow \log_4(x-1) + \log_4(2x+1) - \log_4(x+2) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \log_4 \left[\frac{(x-1)(2x+1)}{x+2} \right] = \frac{1}{2} \quad \text{và } x > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - x - 1}{x+2} = 2 \quad \text{và } x > 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \quad \text{và } x > 1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

1)
$$\frac{\log_2(x^2 + 6x - 7)}{1 + \log_4\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)} \geq 2$$

2)
$$\log_2 x + \log_3 x \geq \log_2 x \log_3 x$$

3)
$$x^{\log_2 3} + x^2 = x^{\log_2 5}$$

7)
$$\log_2(3x-1) + \frac{1}{\log_{x+3} 2} = 2 + \log_2(x+1)$$

4)
$$\log_3(x + \sqrt{x^2 - 15}) \log_5(x - \sqrt{x^2 - 45}) = 2$$

5)
$$\log_{0.2}(x-2) + \log_3 x \geq \log_5(x+2)$$

6)
$$(x+3)\log_2^2(x+2) + 4(x+2)\log_3(x+2) = 16$$

8) CMR: với mọi $a > 0$, hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} e^x - e^y = \ln(1+x) - \ln(1+y) \\ x - y = a \end{cases}$$

9) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2(xy) \\ 3^{x^2 - xy + y^2} = 81 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}) \quad (\text{ĐH A 2009})$

10) Tìm m để phương trình sau có đúng 1 nghiệm:

$$(\sqrt{5}+1)^x + 2m(\sqrt{5}-1)^x = 2x$$

11) $7^{3x} + 9 \cdot 5^{2x} = 5^{2x} + 9 \cdot 7^{3x}$

12) $(5)^{7^x} = (7)^{5^x}$

13) $(\sqrt[5]{3})^x + (\sqrt[10]{3})^{x-10} - 84 = 0$

14) $16^{x-3} + (x-6)4^{x-3} + 8 - 2x = 0$

19) $|x-3|^{x^2-x} = 9 - 6x + x^2$

20) $3 \cdot 25^{x-2} + (3x-10) \cdot 5^{x-2} + 3 - x = 0$

21) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm trái dấu:

$$(m+3)16^x + (2m-1)4^x + m+1 = 0$$

22) Tìm m để phương trình có nghiệm:

$$9^x - m \cdot 3^x + 2m + 1 = 0$$

25) Giải bất phương trình:

$$\log_2 \left[\log_{0.5} \left(2^x - \frac{15}{16} \right) \right] \leq 2$$

15) Tìm m để phương trình sau có đúng 1 nghiệm:

$$9^{\sin^2 x} + 9^{\cos^2 x} = m$$

16) $\log_{3x-x^2}(3-x) > 1$

17) $16^{x-3} + (x-6)4^{x-3} + 8 - 2x = 0$

18) Cho bất phương trình:

$$\log_2(\sqrt{x^2+1}) < \log_2(ax+a) \quad (1)$$

a) Giải bất phương trình khi a=2

b) Tìm tất cả giá trị của a để bất phương trình có nghiệm

23) $\sqrt{2(5^x+4)} - \sqrt{5^x-3} \leq \sqrt{5^x+3}$

24) Tìm m để hệ có nghiệm:

$$\begin{cases} \log_2(x+y) + \log_m(x-y) = 1 \\ x^2 - y^2 = m \end{cases}$$

26) Giải bất phương trình

$$\log_3 \left(\log_4 \left(\frac{3x-1}{x+1} \right) \right) \leq \log_{\frac{1}{3}} \left(\log_{\frac{1}{4}} \frac{x+1}{3x-1} \right)$$



Bài VII: SỐ PHỨC

Năm 2008-2009 số phức chính thức được đưa vào giảng dạy ở bậc THPT và xuất hiện trong đề thi đại học 2009. Đề thi phần số phức thường không khó và xoay quanh các dạng như sau:

- Giải phương trình trên tập số phức.
- Tìm tập hợp số phức (Biểu diễn trên mặt phẳng phức)
- Dạng tính toán liên quan đến lũy thừa (Chủ yếu dùng công thức Moavơ, nhị thức newton...)
- Tìm thành phần của số phức, chứng minh số thực, ảo, thỏa biểu thức yêu cầu...
- Toán hỗn hợp: kết hợp yếu tố phức và các yếu tố đại số thông thường như tìm m để phương trình có nghiệm

Phần I: KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

- Số phức bằng nhau:

$$a_1 + b_1i = a_2 + b_2i \Leftrightarrow a_1 = a_2; b_1 = b_2$$

- Số thực có dạng: $a+0i$
Số thuần ảo có dạng: $0+bi$
- Môđun của số phức

$$z = a + bi \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- Số phức liên hợp:

$$z = a + bi \Rightarrow \text{Liên hợp của } z; \text{ kí hiệu } \bar{z} \text{ với } \bar{z} = a - bi$$

$$\Rightarrow \overline{\bar{z}} = z; \quad |\bar{z}| = |z|$$

I. Dạng lượng giác của số phức:

1. Argument của số phức (Arg):

Gọi r và θ lần lượt là modun và argument của số phức: $z = a + bi$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \sin \theta = \frac{b}{r}; \cos \theta = \frac{a}{r} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \tan \theta = \frac{b}{a} \end{cases}$$

2. Dạng lượng giác:

$\forall z = a + bi; |z| \neq 0$ luôn có dạng:

$$z = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i \right) \text{ hay } z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (1)$$

- (1) Được gọi là dạng lượng giác của số phức!

⚠ Lưu ý: trước khi thực hiện bất kì phép toán nào liên quan đến số phức dạng lượng giác, ta phải quy về dạng chuẩn $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

3. Tính toán với số phức:

$$u = a_1 + b_1i$$

$$\left| \right.$$

$$v = a_2 + b_2i$$

$$|u| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

$$u = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

$$v = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

$$\bar{u} = a_1 - b_1 i$$

$$\frac{1}{u} = \frac{\bar{u}}{u^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{1}{r} (\cos(-\varphi_1) + i \sin(-\varphi_1))$$

$$u + v = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$u - v = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

$$u \cdot v = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$u^n = r_1^n [\cos(n\varphi_1) + i \sin(n\varphi_1)] \quad (\text{Công thức Moavơ})$$

$$\frac{u}{v} = u \cdot \frac{\bar{v}}{v^2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) - (a_1 b_2 a_2 - b_1)}{a_2^2 + b_2^2} i = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

4. Căn bậc 2 của số phức:

Cách 1: Dùng công thức Moavơ

cách 2: Giải hệ sau:

$$\sqrt{z} = x + yi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Phần II: GIẢI ĐỀ THI:

1. Cách giải phương trình bậc 2 bằng máy fx-570es:

VD1. Giải phương trình: $5x^2 + 9x + 3 = 0$

Giải:

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3} = \sqrt{21}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 + \sqrt{21}}{10}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 - \sqrt{21}}{10}$$

Lời bình: Có lẽ bạn đang cảm thấy hơi kì lạ và đặt câu hỏi: Tại sao lại đưa 1 bài toán "lớp nhí" để giải thế này?? Đừng vội chán nản! Đây chính là kĩ năng quan trọng để giải toán bằng máy tính! Máy fx570es có chức năng đáng giá là Natural display – hiển thị số trực quan! Chức năng này không thể tìm thấy ở bất kì dòng máy MS nào! Để giải bài toán lớp nhí kia ta làm như sau:

Lưu hệ số: A=5 B=9 C=3 bằng cách nhấn:

5 _SHIFT_STO_A

9 _SHIFT_STO_B

3 _SHIFT_STO_C

Tính $\sqrt{\Delta} = \sqrt{b^2 - 4ac}$. Ta soạn vào màn hình: $\sqrt{B^2 - 4AC}$ _SHIFT_STO_D

Sau đó ta cho "ra lò" kết quả như sau:

Soạn vào màn hình:

$$\frac{-B+D}{2A} \text{ rồi nhân } = \text{ta được } x_1$$

$$\frac{-B-D}{2A} \text{ rồi nhân } = \text{ta được } x_2$$

⇒ Đây chính là tiền đề để ta giải các phương trình phức sau này! nếu luyện tập thành thục, ta sẽ giải mọi phương trình bậc 2 và phương trình phức mà không cần giấy nháp! Ta cùng đến với VD2:

VD2. Giải phương trình sau trên tập số phức: $4z^2 + 2z + 9 = 0$

Giải:

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{b^2 - 4ac} = 2\sqrt{35}i$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1}{4} + \frac{\sqrt{35}}{4}i$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{35}}{4}i$$

Lời bình: Sử dụng cách bấm máy thông thường, phương trình cho ra nghiệm "xấu". Bấm tiếp Mode_2:CMPLX để vào menu tính toán với số phức!

Lưu A=4 B=2 C=9

Phương trình có 2 nghiệm phức vì thế luôn tồn tại $\sqrt{\Delta}$ xác định. Soạn vào màn hình biểu thức sau: $\sqrt{B^2 - 4AC}$ SHIFT STO D → Ta được $D = 2\sqrt{35}i$

Sau đó thế vào công thức nghiệm như phương trình lớp nhí vừa giải, ta được kết quả.

Qua bài trên ta thấy thêm phần nào công dụng của máy 570es. Nghiệm xấu luôn là nỗi ám ảnh của người làm toán và các thí sinh khi làm bài. Quá trình khai, trục căn, làm gọn mất khá nhiều thời gian. Trong khi bạn bên cạnh đang hì hục tính $\sqrt{\Delta}$ ta qua ví dụ 3:

VD3. Giải phương trình phức: $z^4 + 2\sqrt{2}iz^2 + 2\sqrt{2}i - 1 = 0$ (1)

Giải:

Đặt $t = x^2$; (1) trở thành:

$$t^2 + 2\sqrt{2}it + 2\sqrt{2}i - 1 = 0 \quad (2) \text{ Để ý: } a-b+c=0 \Rightarrow t=-1 \vee t=1-i2\sqrt{2}$$

$$\text{Với } t=-1 \Leftrightarrow x^2 = i^2 \Leftrightarrow x = \pm i$$

$$\text{Với: } t=1-i2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-i)^2 \Leftrightarrow x^2 = (\sqrt{2}-i)^2 \Leftrightarrow x = \pm(\sqrt{2}-i)$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm: $x = \pm i$; $x = \pm(\sqrt{2}-i)$

VD4. Giải phương trình phức: $(1+i)x^2 + (8+i)x + 3(5-2i) = 0$

Giải:

$$\text{Ta có: } \Delta = (8+i)^2 - 12(1+i)(5-2i) = -(21+20i) = (2-5i)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm(2-5i)$$

Từ đó ta có:

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8+i-2+5i}{2(1+i)} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8+i+2-5i}{2(1+i)} = \frac{5-2i}{1+i} = 5(1-i)$$

Trong bài trên ta đã ẩn chứng công đoạn giải hệ phương trình để tìm $\sqrt{\Delta}$ bằng mệnh đề :

$$\Delta = (8+i)^2 - 12(1+i)(5-2i) = -(21+20i) = (2-5i)^2$$

VD5. Giải phương trình sau trên tập số phức, biết phương trình có 1 nghiệm thuần ảo: $z^3 - (3+5i)z^2 + (-5+8i)z + 5+i = 0$ (1)

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow (z-i)[z^2 - (3+4i)z - 1+5i] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z-i=0 \Leftrightarrow z=i \\ z^2 - (3+4i)z - 1+5i = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\Delta = -3+4i = (1+2i)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1+2i$$

$$\text{Giải (2)} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 2+3i \\ z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 1+i \end{cases}$$

Lời bình: Trong phương trình trên ta may mắn "mò" được 1 nghiệm là $z=i$ sau đó ta chia theo sơ đồ Horner (Xem phụ lục) rồi cuối cùng để bớt giải dài dòng, ta ẩn chứng bằng cách phân tích thành tích:

$$(1) \Leftrightarrow (z-i)[z^2 - (3+4i)z - 1+5i] = 0.$$

Để tiện tính nhanh sơ đồ Horner và không sợ sai ta sử dụng cách "liên hoàn bấm" như sau:

	1	$-(3+5i)$	$(-5+8i)$	$5+i$
i	1	α	β	μ

α ; β ; μ là các số cần điền. Đầu tiên ta nhấn $1_-=$. Để lưu vào biến nhớ Ans.

Sau đó ta soạn tiếp vào màn hình:

Ans_x_i_+_A (gọi i bằng cách vào Mode_CMPLX $\rightarrow$ nhấn SHIFT_ENG)

Nhấn tiếp CALC. Máy hỏi A? ta nhập vào: $-(3+5i)$ rồi nhấn =. Được $-3-4i$, ta ghi kết quả vào vị trí α .

Bấm CALC máy hỏi tiếp A?: ta nhập vào: $(-5+8i)$ nhấn = ta được $-1+5i$ ta ghi kết quả vào vị trí β .

Tiếp tục làm như vậy cho đến hết. ta được sơ đồ Horner hoàn thiện.

Các bạn tổng quát cách làm trên cho các dạng áp dụng sơ đồ Horner khác khi cần phân tích 1 đa thức nào đó!

VD6. Tính: $A = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{2010}$

Giải:

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i \quad (1)$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$$

Áp dụng công thức Moavơ:

$$A = \left(\sqrt{2} \right)^{2010} \left(\cos \frac{2010 \cdot 7\pi}{12} + i \sin \frac{2010 \cdot 7\pi}{12} \right) = 2^{1005} (0+i) = 2^{1005}i$$

Lời bình: Gặp dạng bài tính toán phức tạp như bài trên ta dùng máy tính “bóc từ trong ra ngoài” và ghi kết quả ra như bước (1). Đầu tiên ta “bóc”:

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i \quad \text{Rồi nhấn tiếp Ans_SHIFT_2(cmplx)_3(} r \angle \theta \text{) để tìm modun và arg của số}$$

phức cần tìm. Nhấn = ta được $\sqrt{2} \angle \frac{7\pi}{12}$.

Các bạn có thể soạn nguyên biểu thức và dùng phép gọi ($\blacktriangleright r \angle \theta$) tuy nhiên ta nên trình bày như bước 1 để giám khảo “tưởng” là mình làm thủ công!!!

- ⇒ Sau đó ta dùng công thức Moavơ. Dùng máy tính để tính ra giá trị cụ thể của giá trị lượng giác. Máy tính chúng ta chỉ tính được giá trị số phức $^2, ^3$ chứ không tính được giá trị bậc cao hay khai căn. Do đó gặp biểu thức số phức bậc 2, bậc 3 ta có thể dùng máy tính cho tiện!
- ⇒ số phức dạng lượng giác phải là: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ (cos “trước” sin “sau”). Ta phải nhớ dạng để tránh làm sai!
- ⇒ Máy tính có thể tính được các số phức bậc 2, bậc 3 và không thể tính bậc cao hơn hay lấy căn, do đó gặp số phức dạng bậc 2, bậc 3 ta cứ dùng máy và tính cho tiện...
- ⇒

Dạng 2: Tìm tập hợp số phức trên mặt phẳng phức, tính chất của số phức.

Cho : $z_1 = x + yi$; $A(x; y)$ hay $\vec{u}(x; y)$

$z_2 = x' + y'i$; $A(x'; y')$ hay $\vec{v}(x'; y')$

$|z| = R$; $R > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow$ Đường tròn tâm 0 Bán kính R

$|z| \leq R$; $R > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq R^2 \Rightarrow$ Hình tròn tâm 0 bán kính R

$|z - (a - bi)| = R$; $R > 0 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \Rightarrow$ Đường tròn tâm I(a; b) bán kính R

Bài Tập:

VD7. Chứng minh rằng: $\frac{z - \bar{z}}{z^3 + (\bar{z})^3}$ là số ảo:

Giải:

Ta tính số phức liên hiệp:

$$\frac{\overline{z - \bar{z}}}{\overline{z^3 + (\bar{z})^3}} = \frac{\bar{z} - z}{z^3 + (\bar{z})^3} = -\frac{z - \bar{z}}{z^3 + (\bar{z})^3}$$

Vậy: $\frac{z - \bar{z}}{z^3 + (\bar{z})^3}$ là số ảo

Lời bình: z là số thực $\Leftrightarrow z = \bar{z}$

z là số ảo $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$

Ta có thể tính theo kiểu khai triển $z = a + bi$, tuy nhiên ta có thể suy ra từ số phức liên hiệp

VD8. Tìm số phức z thỏa mãn:

$$\begin{cases} |z - (2 + i)| = \sqrt{10} \\ z \cdot \bar{z} = 25 \end{cases}$$

Giải:

Gọi số phức cần tìm là $z = x + yi$

$$\Rightarrow z - (2+i) = (x-2) + (y-1)i$$

$$\Leftrightarrow |z - (2+i)| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$$

$$\text{Lại có: } z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = 25$$

Do đó: phần thực và phần ảo của số phức cần tìm là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 10 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 20 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 2x \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow 5x^2 - 10x + 100 = 25$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\text{Vậy có 2 giá trị } z \text{ thỏa mãn là: } \begin{cases} z = 5 \\ z = 3 + 4i \end{cases}$$

VD9. Tìm phần ảo của số phức z biết: $\bar{z} = (\sqrt{2} + i)^2 (1 - \sqrt{2}i)$

Giải:

$$\text{Ta có: } (\sqrt{2} + i)^2 = 1 + 2\sqrt{2}i \quad (1)$$

$$\Rightarrow \bar{z} = (1 + 2\sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i) = 5 + \sqrt{2}i \quad (2)$$

$$\Rightarrow z = 5 - \sqrt{2}i$$

Vậy phần ảo của số phức z là $-\sqrt{2}$

Lưu ý: Các bước (1) (2) làm hoàn toàn bằng máy tính. Ta chỉ ghi ra chi tiết coi như "chiều lệ". Vậy là ta đã mất 5 phút để lấy tròn 1 điểm trong đề thi đại học 2010.

VD10. Trong mặt phẳng Oxy tìm tập hợp biểu diễn số phức z thỏa mãn:

$$|z - i| = |(1+i)z|$$

Giải:

$$\text{Gọi: } z = x + yi \Rightarrow z - i = x + (y-1)i \Rightarrow (1+i)z = (1+i)(x + yi) = x + yi + xi - y$$

$$= x - y + (x + y)i$$

$$\text{Theo GT} \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-y)^2 + (x+y)^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 2x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 2 \quad \text{Vậy tập}$$

hợp số phức là đường tròn tâm $I(0; -1)$ và có bán kính $R = \sqrt{2}$

Lưu ý:

Đối với dạng toán tìm tập hợp điểm, cách đặt $z = x + yi$ sau đó khai triển theo biểu thức giả thiết luôn dẫn đến sự thành công của lời giải!

VD11. Tìm các số thực $x; y$ sao cho:

$$(x + yi)^3 = i \quad (1)$$

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) = i \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 0 \\ 3x^2y - y^3 = 1 \end{cases}$$

$$x^3 - 3xy^2 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3}y \end{cases}$$

Xét: TH1: $x = 0 \Rightarrow y = -1$

$$TH2: x = \pm\sqrt{3}y \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

VD12. Cho số phức: $a = xy + x + (x^2y^2 + xy)i$; $b = 7y + 13y^2i$; $c = 1 + i$

Tìm tập hợp số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $a + c = b$ biết b là số phức.

Giải:

Ta có: $a + c = (xy + x + 1) + (x^2y^2 + xy + 1)i$

$$a + c = b \Leftrightarrow \begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases} \quad (I)$$

Do b là số phức nên $y \neq 0$

$$\text{Ta có: } (I) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{x}{y} + \frac{1}{y} = 7 \\ x^2 + \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{y}\right) + \frac{x}{y} = 7 \\ \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{y}\right) - 20 = 0 \\ \frac{x}{y} = 7 - \left(x + \frac{1}{y}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + \frac{1}{y} = -5 \\ x = 12y \end{cases} \Rightarrow \text{VN} \\ \begin{cases} x + \frac{1}{y} = 4 \\ x = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3} \\ x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \end{cases} \quad \text{Vậy số phức cần tìm là: } z = 1 + \frac{1}{3}i \text{ hoặc } z = 3 + i$$

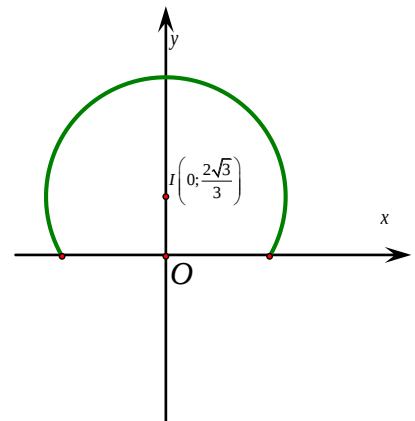
VD13. Tìm tập hợp số phức z thỏa mãn $a = \frac{z-2}{z+2}$ có một $\text{Arg} = \frac{\pi}{3}$

Giải:

$$a = \frac{z-2}{z+2} \cdot \frac{\bar{z}+2}{\bar{z}+2} = \frac{z\bar{z} - 4 + 2(z - \bar{z})}{(z+2)^2}$$

Theo gt: có 1 $\text{Arg} = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow z\bar{z} - 4 + 2(z - \bar{z}) = l(1 + i\sqrt{3}) \quad (l \in \mathbb{R}; l > 0)$

Gọi: $z = x + yi$ thì $z\bar{z} - 4 + 2(z - \bar{z}) = x^2 + y^2 - 4 + 4yi = l + l\sqrt{3}i$



$$4y = (x^2 + y^2 - 4)\sqrt{3} > 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{16}{3}$$

Vậy trong mặt phẳng phức, tập hợp số z là đường tròn tâm $I\left(0; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ có $R = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ nằm trên trục thực.

Bài tập tư luyện

1) Tìm tập hợp các điểm biểu diễn z trên mặt phẳng phức:

a. $\left|z^2 - (z\bar{z})^2\right| = 4$ Gợi ý: $y = \frac{1}{x}$ và $y = -\frac{1}{x}$

b. $|z - i| + |z + i| = 4$

Gợi ý: $\Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 4$

Vậy tập hợp z là elip có 2 tiêu điểm $F_1(-i; 0)$ $F_2(i; 0)$ và độ dài trục lớn $2a=4$

2) Tìm module và Argument của số phức: $z = \left(\frac{5+3\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}\right)^{21}$

Gợi ý: “Bóc” từ trong ra ngoài bằng máy tính sau đó dùng công thức Moavơ

3) Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} = \frac{(1-\sqrt{3}i)^3}{1-i}$ Tìm module của số phức $a = \bar{z} + iz$

Gợi ý: “Bóc” từ trong ra ngoài, từ tử số đến mẫu số. Dùng hàm CONJG trong menu CMLX.

Đáp số: $a = -8 - 8i \Rightarrow r = 8\sqrt{2}$



PHỤ LỤC: MỘT SỐ ĐỀ THI CẦN THAM KHẢO (Theo cấu trúc đề thi của Bộ GD&ĐT 2010)

ĐỀ 1:

A. PHẦN CHUNG:

Câu 1: Cho hàm số (C) $y = \frac{1}{4}(x^2 - m)(x^2 + 1)$, m là tham số.

1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) khi $m = 3$
2. Định m biết đồ thị hàm số (C) cắt Ox tại A và B sao cho 2 tiếp tuyến tại A và B vuông góc.

Câu 2:

1. Giải phương trình: $\cos^3 2x + \frac{7}{2} \sin^2 x = 2 \sin x$
2. Giải phương trình: $x\sqrt{x} + (x-4)\sqrt{4-x} = 4(x-2)$

Câu 3: Tính giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \log_2(\cos x)}{2^{x \sin x} - \sqrt{x^2 + 1}}$

Câu 4: Cho hình nón đỉnh S có thiết diện qua trục SO=a là một tam giác vuông. Mặt phẳng qua S và cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $\triangle SAB$ đều. Tính thể tích hình cầu ngoại tiếp hình chóp SOAB.

Câu 5: Cho $x, y, z \in [0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất: $A = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$

B. PHẦN TỰ CHỌN: (Thí sinh chỉ được chọn **Câu 6** hoặc **Câu 7**)

Câu 6: (Chương trình chuẩn)

a. Trong Oxy cho $\triangle ABC$ có $A(0; 2)$, $B(2; 6)$, và $C \in d: x - 3y + 1 = 0$ sao cho phân giác kẻ từ A song song với d. Tìm tọa độ C.

b. Trong Oxyz viết phương trình đường thẳng Δ qua $A(0; 1; 2)$ cắt $d_1: \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$ và hợp với

$$d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{-1} \text{ một góc } 60^\circ$$

c. Cho $a_n(x-1)^n + a_{n-1}(x-1)^{n-1} + \dots + a_1(x-1) + a_0 = x^n, \forall x \in R$. Tìm n biết $a_2 + a_3 + a_1 = 231$

Câu 7: (Chương trình nâng cao)

a. Trong Oxy tìm $M \in (E): \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ biết khoảng cách từ M đến d: $x+y=0$ là lớn nhất

b. Trong Oxyz viết phương trình mặt phẳng qua $M(1; 2; 2)$ và cắt Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho:

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{OM^2}$$

c. Bằng cách khai triển: $(1+i)^{2n}$ hãy chứng minh: $C_{2n}^0 - C_{2n}^2 + C_{2n}^4 - \dots + (-1)^n C_{2n}^{2n} = 2^n \cos \frac{n\pi}{2}$,

$(n \in N, n > 0)$.

ĐỀ 2:

A. PHẦN CHUNG:

Câu 1: Cho hàm số (C) $y = -x^4 + \frac{2}{9}x^2$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)
2. Tìm trên đồ thị (C) các điểm A biết tiếp tuyến tại A cắt (C) tại B và C sao cho $AB=AC$ (B,C khác A)

Câu 2:

1. Giải phương trình: $(1 - \sqrt{3} \cos x) \sin x + (\sqrt{3} - \cos x) \cos x = 1$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+2y} - \sqrt{x-2y} = 2 \\ \sqrt[3]{x+3} + \sqrt{x^2-4y^2} = 5 \end{cases}$$

Câu 3: Tính tích phân: $\int_1^e \frac{dx}{x + x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$

Câu 4: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có $AB'=a$; $BC'=b$ và $\triangle ABC$ vuông cân tại A. Tính thể tích lăng trụ. ($a < b < a\sqrt{2}$)

Câu 5: Cho $x, y \in [1; 2]$. Tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất:

$$A = (x^2 + y^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) + 4(x - y) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)$$

B. PHẦN TỰ CHỌN: (Thí sinh chỉ được chọn **Câu 6** hoặc **Câu 7**)

Câu 6: (Chương trình chuẩn)

a. Trong Oxy tìm $M \in (E): \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ biết góc F_1MF_2 bằng 60° .

b. Trong Oxyz viết phương trình tham số đường thẳng Δ song song với (P): $2x+2y-z-3=0$ và cắt hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ và $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$ tại A và B sao cho $AB=3$

c. Gieo đồng thời 3 con xúc xắc, tính xác suất để tích 3 số nốt xuất hiện là 1 số chẵn.

Câu 7: (Chương trình nâng cao)

a. Trong Oxy viết phương trình chính tắc hypebol qua $M(2;1)$ thỏa góc F_1MF_2 bằng 60°

b. Trong Oxyz viết phương trình mặt phẳng hợp với (Oxy) một góc 45° , song song với Ox và cách Ox một khoảng bằng $\sqrt{2}$

c. Cho $z = \sqrt{3} + i$. Tìm số tự nhiên $n > 0$ sao cho z^n là số nguyên dương bé nhất.

ĐỀ 3:

A. PHẦN CHUNG:

Câu 1: Cho hàm số (C) $y = \frac{mx+2}{x+m}$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) khi $m = -1$
2. Tìm trên đồ thị (C) cắt Ox tại A, Cắt Oy tại B sao cho 2 tiếp tuyến tại A và B song song

Câu 2:

3. Giải phương trình: $\cos 2x + \cos x + \sqrt{3} \sin x = \frac{1}{2}$
4. Giải phương trình: $\log_2 \left(x + \sqrt{x^2 - 12} \right) \cdot \log_3 \left(x - \sqrt{x^2 - 12} \right) = 2$

Câu 3: Tính tích phân: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x dx}{(1 + \cos x)^4}$

Câu 4: Tính thể tích hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, chiều cao SA=a hợp với (SBC) và (SBD) các góc 45° và 30°

Câu 5: Định m để hệ sau có nghiệm:
$$\begin{cases} x^2 - xy + \frac{y^2}{2} = \frac{1}{4} \\ x^2 + x - y = m \end{cases}$$

B. PHẦN TỰ CHỌN: (Thí sinh chỉ được chọn **Câu 6** hoặc **Câu 7**)

Câu 6: (Chương trình chuẩn)

a. Viết phương trình đường tròn đi qua gốc tọa độ và cắt Ox, Oy tại A, B sao cho $AB = 4\sqrt{2}$. Biết rằng tâm đường tròn thuộc d: $x+y-4=0$

b. Trong Oxyz viết phương trình mặt phẳng (P) qua $M(1;1;0)$, song song với $d: \frac{x-3}{4} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{3}$ và cách gốc tọa độ một khoảng bằng 1.

c. Tìm $a, b \in \mathbb{R}$ biết phương trình $\frac{a}{z+1} + \frac{b}{z-5} = 3$ có 1 nghiệm $z_1 = \frac{5i}{1+2i}$. Tìm nghiệm còn lại.

Câu 7: (Chương trình nâng cao)

a. Tìm tọa độ 3 đỉnh $\triangle ABC$ vuông cân tại A có trục đối xứng là $x-2y+1=0$; $A \notin Ox$; $B \in Oy$ và $C \in d: x+y-1=0$.

b. Viết phương trình tham số của đường thẳng d qua $M(1;2;0)$, song song với (P): $2x-y+z-1=0$ và hợp với (Q): $x+y+2z-1=0$ một góc 60°

c. Trong hộp đựng 15 viên bi gồm 4 bi đỏ, 5 bi xanh và 6 bi vàng. Tính xác suất để chọn được 4 viên bi đủ cả 3 màu.

ĐỀ 4:

A. PHẦN CHUNG:

Câu 1: Cho hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + x^2$ có đồ thị (C)

1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)
2. Viết Phương trình đường thẳng d qua gốc tọa độ O và cắt (C) tại A và B (khác O) sao cho 2 tiếp tuyến của (C) tại A và B vuông góc.

Câu 2:

5. Giải phương trình: $4^{\tan x} + 2^{\tan x + \sin 2x} = 2^{1+2\sin 2x}$

6. Giải bất phương trình: $\frac{\sqrt{2+2x}-3\sqrt{x}}{\sqrt{2-2x}-5\sqrt{x}} \geq x$

Câu 3: Tính tích phân: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$

Câu 4: Tính thể tích hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông chiều cao SA. Biết SC=2a hợp với (SAB) một góc 30° .

Câu 5: Cho $a, b, c > 0$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất: $A = a^3 + b^3 + c^3 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$

B. PHẦN TỰ CHỌN: (Thí sinh chỉ được chọn **Câu 6** hoặc **Câu 7**)

Câu 6: (Chương trình chuẩn)

I/ Trong Oxyz cho A(2;3;-1), B(5;-3;2) và (P): $x+y+z-3=0$:

a. Viết phương trình tham số đường thẳng d vuông góc với (P) và cắt đường thẳng AB tại I sao cho $\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{BI} = 0$

b. Tìm $M \in (P)$ sao cho $AM^2 + 2BM^2$ nhỏ nhất

II/ Hãy phân phối 2010 điểm lên 2 đường thẳng song song sao cho tổng số tam giác thu được là lớn nhất.

Câu 7: (Chương trình nâng cao)

I/

a Viết phương trình đường tròn trong Oxy đi qua A(2;1), Tâm thuộc Oy và cắt Ox tại B và C sao cho góc BAC bằng 60°

b. Trong Oxyz cho A(0;1;2), B(1;-1;1), C(-1;3;0). Viết phương trình tham số đường thẳng d vuông góc với (ABC) và cắt (ABC) tại trực tâm H của $\triangle ABC$.

II/ Định m biết đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - (m+1)x + 2m-1}{x-m}$ tiếp xúc với Ox.

ĐỀ 5:

A. PHẦN CHUNG:

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ có đồ thị (C)

1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)
2. Cho A(0;2). Tìm trên (C) điểm M sao cho AM ngắn nhất.

Câu 2:

1. Giải phương trình: $\cos^2 x - \cos x \cos 3x + \cos^2 3x = \frac{3}{4}$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} = 3 \\ \frac{1}{x+y} + \frac{1}{xy} = 1 \end{cases}$$

Câu 3: Tính tích phân:
$$\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

Câu 4: Cho hình chóp S.ABCD có (SAB) $\perp$ (ABC), ΔABC đều và ΔABC vuông cân tại A. Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp Biết $SC = a\sqrt{2}$

Câu 5: Cho $a, b, > 0$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất: $A = \frac{a}{a-1} + \frac{b}{b-1} + \frac{25ab}{4(a^2+b^2)}$

B. PHẦN TỰ CHỌN: (Thí sinh chỉ được chọn **Câu 6** hoặc **Câu 7**)

Câu 6: (Chương trình chuẩn)

I/ Trong Oxyz cho A(2;-1;2), B(3;-3;3); C(1;-2;4) và (P): $2x-3y+z+1=0$:

a. Viết phương trình tham số đường thẳng d đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và vuông góc với (P)

b. Tìm $M \in (P)$ sao cho $AM^2 + 2BM^2 + CM^2$ nhỏ nhất

II/ Tìm $a, b \in \mathbb{R}$ biết $Z = i - i^2 + i^3 - i^4 + \dots + i^{2009}$ là nghiệm của phương trình $\frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-z} = 1$. Tìm nghiệm còn lại.

Câu 7: (Chương trình nâng cao)

I/ Trong Oxyz cho $d_1: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$; $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$

a Tìm $A \in d_1$ biết khoảng cách từ A đến d_2 bằng $\sqrt{6}$

b. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d_2 và hợp với d_1 một góc 30°

II/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2^{\log_3 x} + y^{\log_3 2} = 6 \\ \log_x y + \log_{\frac{y}{x^3}} x = 1 \end{cases}$$

ĐỀ 6:

A. PHẦN CHUNG:

Câu 1: Cho hàm số (C) $y = \frac{x^4}{4} - mx^2 + m + 1$, m là tham số.

1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) khi $m = 1$
2. Định m biết đồ thị hàm số (C) có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác có trục tâm là gốc tọa độ

Câu 2:

1. Giải phương trình: $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x^3 + y^3)\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}\right) + (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 8 \\ \log_2 \frac{x}{2} \log_3 \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$$

Câu 3: Tính tích phân: $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{e^{\sqrt{1+x^2}}}$

Câu 4: Tính thể tích hình lăng trụ đều ABCD.A'B'C'D' biết $AC' = a$ và góc giữa BD và CD' bằng 60° .

Câu 5: Cho $a, b, c > 0$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Tìm giá trị lớn nhất: $A = \frac{b+c}{b^3+c^3} + \frac{c+a}{c^3+a^3} + \frac{a+b}{a^3+b^3}$

B. PHẦN TỰ CHỌN: (Thí sinh chỉ được chọn **Câu 6** hoặc **Câu 7**)

Câu 6: (Chương trình chuẩn)

a. Trong Oxy cho ΔABC vuông cân tại A có diện tích bằng 2, biết $A \in d_1: 2x - y + 1 = 0$ và $B, C \in d_2: x + y - 2 = 0$. Tìm tọa độ A, B, C với $x_A, x_B > 0$.

b. Trong Oxyz viết phương mặt phẳng (P) qua $A(0;1;2)$, $B(1;3;3)$ và hợp với (Q): $x - y - 2z = 0$ một góc nhỏ nhất.

c. Tìm số tự nhiên n thỏa: $C_{n+1}^3 - C_{n+1}^2 = \frac{1}{7} A_n^3$

Câu 7: (Chương trình nâng cao)

a. Trong Oxy cho hai đường tròn $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx - my + m - 2 = 0$ và $(C): x^2 + y^2 - 3x + 1 = 0$. Định m biết số tiếp tuyến chung của hai đường tròn là một số lẻ.

b. Trong Oxyz viết phương trình đường thẳng d song song với (P): $x + 2y + z - 1 = 0$ và cắt 2 đường thẳng

Ox và $\Delta: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ tại 2 điểm A, B sao cho AB ngắn nhất.

c. Giải phương trình: $z^4 + z^2 + 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$.

ĐỀ 7:

A. PHẦN CHUNG:

Câu 1: Cho hàm số (C) $y = x^3 - 3ax^2 + b$, (1) ($a, b > 0$)

1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) khi $a=1$ $b=4$
2. Định a, b biết đồ thị hàm số (C) có 2 điểm cực trị A và B sao cho ΔOAB vuông cân.

Câu 2:

3. Giải phương trình: $\tan 2x \left(1 + \tan x \cdot \tan \frac{x}{2} \right) = \frac{2}{\sin 3x}$

4. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{2} \\ \frac{5}{x^2+y^2} - \frac{2}{x^2y^2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Câu 3: Tính giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{x+1}}{\ln(1+\sin x)}$

Câu 4: Cho hình chóp S.ABCD chiều cao $SA=2a$, đáy là hình thang vuông tại A và B có $AB=BC=a$, $AD=2a$. Mặt phẳng qua trung điểm M của SA chứa CD, cắt SB tại N. Tính diện tích tứ giác CDMN.

Câu 5: Định m để bất phương trình có nghiệm:

$$\frac{1}{2\sqrt{mx-x^2}} + \ln(|x| + |x-m| + |2x-m|) \leq 1. \text{ Tìm nghiệm tương ứng}$$

B. PHẦN TỰ CHỌN: (Thí sinh chỉ được chọn **Câu 6** hoặc **Câu 7**)

Câu 6: (Chương trình chuẩn)

a. Trong Oxy cho $A(7;1), B(-3;-4), C(1;4)$. Viết phương trình đường tròn nội tiếp ΔABC .

b. Trong Oxyz viết phương trình mặt phẳng (P) qua gốc tọa độ, song song với $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$ và

hợp với $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$ một góc 60°

c. Tìm hệ số của x^3 trong khai triển thành đa thức của biểu thức: $(x^2 + x - 1)^6$.

Câu 7: (Chương trình nâng cao)

a. Trong Oxy cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$. Tìm M thuộc trục tung sao cho qua M kẻ được hai tiếp tuyến của (C) mà góc giữa hai tiếp tuyến bằng 60°

b. Trong Oxyz Cho $M(2;1;0)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm M, cắt và vuông góc với đường thẳng d.

c. Tìm hệ số của x^3 trong khai triển thành đa thức của biểu thức: $(x^2 + x - 1)^5$.

ĐỀ 8:

A. PHẦN CHUNG:

Câu 1: Cho hàm số (C) $y = \frac{mx+1}{x+1}$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) khi $m = -1$
2. Định m biết tiếp tuyến tại điểm cố định của họ đồ thị (C) cách $I(1;0)$ một khoảng lớn nhất

Câu 2:

1. Giải phương trình: $\sin^2 x + \sin 2x \cdot \sin 4x = \cos^2 2x$
2. Giải bất phương trình: $2^{2+3x} + 2^{2-3x} - 7(2^x + 2^{-x}) \leq 15$

Câu 3: Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng tạo bởi (C): $y = \sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}$, trục Ox và 2 đường thẳng $x=1$; $x=2$ quay quanh Ox.

Câu 4: Cho hình vuông ABCD cạnh a và hai đường thẳng $d_1; d_2$ lần lượt qua A và C và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Lấy $M \in d_1$, $N \in d_2$ sao cho $\overline{AM}, \overline{CN}$ cùng chiều và có tổng độ dài bằng 6a. Tính thể tích tứ diện MNBD

Câu 5: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{1+y \ln y} \\ xy + \frac{1}{y} = y^2 + \frac{1}{1+x \ln x} \end{cases}$$

B. PHẦN TỰ CHỌN: (Thí sinh chỉ được chọn **Câu 6** hoặc **Câu 7**)

Câu 6: (Chương trình chuẩn)

a. Trong Oxy cho A, B là hai điểm trên (P): $y^2 = x$ sao cho ΔOAB vuông tại A. Tìm tọa độ A, B ($y_A < 0$) biết OB ngắn nhất.

b. Trong Oxyz viết phương trình mặt phẳng (P) qua gốc tọa độ và song song với $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$ và cách d một khoảng bằng 1.

c. Cho đa giác lồi n đỉnh, biết rằng số tam giác có đỉnh và cạnh chung với đa giác là 70. Tìm số tam giác có đỉnh chung và không có cạnh chung với đa giác.

Câu 7: (Chương trình nâng cao)

a. Trong Oxy viết phương trình chính tắc elip (E) qua $M(2;1)$ sao cho $MF_1 \cdot MF_2$ nhỏ nhất.

b. Trong Oxyz viết phương trình mặt phẳng (P) qua gốc tọa độ và lần lượt hợp với 2 mặt phẳng (Q): $x+z-1=0$ và (R): $x+2y-z+1=0$ các góc 30° và 60°

c. Tính giá trị: $Z = (1+2i+3i^2+\dots+2009i^{2008})(1-2i+3i^2-4i^3+\dots+2009i^{2008})$.

ĐỀ 9:

A. PHẦN CHUNG:

Câu 1: Cho hàm số (C) $y = (x - m)(x^2 - x + 1)$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) khi $m = 3$
2. Định m biết (C_m) cắt Ox tại A, cắt Oy tại B sao cho hai tiếp tuyến của (C_m) tại A và B vuông góc.

Câu 2:

1. Giải phương trình: $\tan x = \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 + \sin x + \cos x}$
2. Giải bất phương trình: $(7 + 5\sqrt{2})^{\log_2 \frac{2}{x}} = (3 - 2\sqrt{2})^{\log_2 x + \log_{2x} 0.25}$

Câu 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: (C): $y = |x^2 - 2x - 3|$ và $d: y = x + 1$

Câu 4: Cho hình chóp S.ABCD chiều cao SA=a, đáy là hình vuông cạnh a. chứng minh AI ⊥ (SBD) và tính thể tích tứ diện SIBD, biết I là trung điểm SC.

Câu 5: Tìm giá trị nhỏ nhất tham số m để hệ:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y^2} = 3 \\ 2x^2 + y = m \end{cases}$$
 có nghiệm $x, y > 0$. Tìm nghiệm tương ứng.

B. PHẦN TỰ CHỌN: (Thí sinh chỉ được chọn **Câu 6** hoặc **Câu 7**)

Câu 6: (Chương trình chuẩn)

a. Trong Oxy cho ΔABC có đường cao và trung tuyến kẻ từ A là $h_A = 2x + y + 4 = 0$, $m_A = y - 2 = 0$ và đường trung tuyến kẻ từ B là $m_B: 3x + 11y + 21 = 0$. Tính góc C

b. Trong Oxyz cho $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$, $d_2: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 1+t \end{cases}$ Chứng minh rằng có vô số mặt phẳng (P) chứa

d_2 và song song với d_1 . Viết phương trình (P) sao cho d_2 là hình chiếu vuông góc của d_1 lên (P)

c. Tìm $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa: $\frac{1}{x + (2-y)i} - \frac{1}{2 + y + xi} = \frac{1}{(1+i)^2}$

Câu 7: (Chương trình nâng cao)

a. Trong Oxy cho (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$) có hai tiêu điểm là $F_1; F_2$. Đường thẳng d qua F_2 vuông góc Ox và cắt (H) tại M và N sao cho ΔF₁MN đều. Tìm tâm sai của (H) và viết phương trình (H) nếu biết diện tích ΔF₁MN = $4\sqrt{3}$

b. Trong Oxyz cho A(-1;2;2), B(0;3;0). Hãy tìm trong (P) sao cho ΔABC đều.

c. Một đường thẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = \frac{3x}{4} + \frac{3}{x}$ và cắt 2 đường tiệm cận tại A và B. Tính diện tích ΔOAB.

ĐỀ 10:

A. PHẦN CHUNG:

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{-x^4}{2} + (m+1)x^2 - m$, (1) có đồ thị (C). m là tham số.

1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) khi $m=0$
2. Chứng minh rằng đồ thị hàm số (1) luôn đi qua 2 điểm A và B cố định. Định m biết 2 tiếp tuyến tại A và B hợp nhau góc 60°

Câu 2:

3. Giải phương trình: $4\sin 2x \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$

4. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - xy + 4y = 8 \\ xy + y^2 + 3x = 12 \end{cases}$$

Câu 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y = \frac{x}{e^{\sqrt{x+\ln x}}}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1; x=4$.

Câu 4: Tính thể tích hình chóp S.ABC biết SA, SB, SC đôi một hợp với nhau góc 60° và có độ dài lần lượt là a, 2a, 3a.

Câu 5: Định m để phương trình $\log_2(|2x-4|+m) = 1 + \log_3[m - (x-1)(x-3)]$ có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm duy nhất đó.

B. PHẦN TỰ CHỌN: (Thí sinh chỉ được chọn **Câu 6** hoặc **Câu 7**)

Câu 6: (Chương trình chuẩn)

I/ Trong Oxyz cho $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ và (P): $x-y-1=0$:

a. Viết phương trình tham số đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d lên (P). Tính góc giữa d và d'.

b. Gọi A là giao điểm của (P) và d. Viết phương trình các mặt cầu tiếp xúc (P) tại A và cắt d tại B sao cho $AB = \sqrt{6}$

II/ Giải phương trình: $\log_3\left(\frac{3}{x}\right)\log_2 x - \log_3\left(\frac{x^3}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}$

Câu 7: (Chương trình nâng cao)

I/ Trong Oxyz cho A là giao điểm của $d_1: \begin{cases} x = t \\ y = 1+2t \\ z = 2+t \end{cases}$ và mặt phẳng (P): $x-2y+z=0$

a Viết phương trình chính tắc đường thẳng Δ qua A vuông góc với d và hợp với (P) một góc 30°

b. Viết phương trình mặt cầu có tâm I thuộc d, đi qua A và cắt P một đường tròn dài $2\pi\sqrt{2}$

II/ Tìm $\varphi \in (0; 2\pi)$ biết đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + (2 + \cos \varphi)x + \sqrt{3} \sin \varphi}{x-1}$ có hai điểm cực trị là A và B sao cho AB dài nhất, ngắn nhất.

ĐỀ 11:

A. PHẦN CHUNG:

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$, (1) có đồ thị (C).

1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1)
2. Tìm M trên (C) biết tiếp tuyến tại M tạo với 2 tiệm cận của (C) một tam giác có chu vi bé nhất.

Câu 2:

5. Giải phương trình: $16\sin^2 x + 4\cos 4x = \sqrt{3}\cos x + \sin x$

6. Giải phương trình: $\sqrt{x-5}(\sqrt{x}-\sqrt{x-5})^3 = 2$

Câu 3: Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình tròn (C): $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$ quay quanh trục Oy.

Câu 4: Cho tứ diện ABCD có $AB=a$, $AC=a\sqrt{2}$, $AD=2a$. Đường thẳng AC hợp với AB, AD các góc 45° , AB hợp với AD góc 60° . Tính tỉ số thể tích của tứ diện và hình cầu ngoại tiếp tứ diện.

Câu 5: Cho $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng: $|a^3 + b^3 + c^3 - 3abc| \leq 1$.

B. PHẦN TỰ CHỌN: (Thí sinh chỉ được chọn **Câu 6** hoặc **Câu 7**)

Câu 6: (Chương trình chuẩn)

a. Trong Oxyz viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $H(1;2;3)$ và cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho H là trọng tâm ΔABC

b. Trong Oxyz viết phương trình mặt cầu tâm $I \in Oz$, đi qua $A(1;1;1)$ và cắt (Oxy) một đường tròn dài 2π

c. Giải phương trình: $C_2^0 + C_3^1 + C_4^2 + \dots + C_x^{x-2} = 120$, $x \in N$

Câu 7: (Chương trình nâng cao)

I/ Trong Oxyz cho $A(3;0;0)$ $B(1;-2;8)$ và mặt phẳng (P): $x-2y+2z+6=0$

a Tìm $M \in (P)$ sao cho $|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}|$ nhỏ nhất.

b. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua A, B và cắt (P) theo giao tuyến d hợp với AB góc 90°

II/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}} + 2^{\frac{x^2-y^2}{xy}} = 5.4^{\frac{x-y}{xy}} \\ \log_3 x + \log_5 y = \log_5 x \cdot \log_3 y \end{cases}$$

ĐỀ 12:

A. PHẦN CHUNG:

Câu 1: Cho hàm số (C) $y = \frac{-x^3}{3} + mx^2 - 2(m-2)x + \frac{16}{3}$ (1)

1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) khi $m = 0$
2. Chứng minh rằng (C_m) luôn tiếp xúc với 1 đường thẳng cố định tại 1 điểm cố định.

Câu 2:

3. Giải phương trình: $\sin 3x + \sin x = \sqrt{3}(\cos x - 1)$
4. Giải bất phương trình: $\log_{\sqrt{2}} \frac{4}{x^2} + \log_{\sqrt{2x}} 0,25 \geq \log_{0,5} x^2$

Câu 3: Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-2x}} dx$

Câu 4: Cho hình trụ có chiều cao bằng bán kính đáy và bằng a. Lấy trên các đường tròn đáy (O) và (O') các điểm A, B sao cho AB=2a. tính góc giữa hai đường thẳng OA, O'B và thể tích tứ diện O'OAB

Câu 5: Cho $a, b > 0$ và $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{ab} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất: $P = \frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{ab}{a+b}$

B. PHẦN TỰ CHỌN: (Thí sinh chỉ được chọn **Câu 6** hoặc **Câu 7**)

Câu 6: (Chương trình chuẩn)

a. Trong Oxy cho $\triangle ABC$ có tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(2;1)$, $A \in Oy$ và đường thẳng BC: $3x - y - 10 = 0$. Tìm tọa độ A, B, C biết góc BAC bằng 45° và $y_A > 0 > y_B$

b. Trong Oxyz cho $A(0;1;0)$, $B(1;-2;2)$. Hãy viết phương trình mặt phẳng (P) qua O, B và cách A một khoảng bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c. Giải phương trình: $4z^4 + 1 = 0$

Câu 7: (Chương trình nâng cao)

a. Trong Oxy cho (P): $y^2 = 2x$ có hai tiêu điểm là F. Đường thẳng d quay quanh F cắt (P) tại M, N.

Chứng minh rằng $\frac{1}{MF} + \frac{1}{NF}$ không đổi.

b. Trong Oxyz viết phương trình tham số đường thẳng qua $M(1;-2;2)$. $d \perp OM$ và d hợp với Oy một góc 45°

c. Tìm hệ số của x^6 trong khai triển thành đa thức của biểu thức: $P = (x+1)^{n+1} (x^2 + x + 1)^n$. Biết hệ số của x^{10} bằng 10.

PHỤ LỤC II: Cách giải nhanh bài toán bằng máy tính bỏ túi.

Trong các kì thi quan trọng có môn toán, máy tính bỏ túi được phép sử dụng và trở thành công cụ không thể thiếu đối với thí sinh. Tuy nhiên ít ai có thể tận dụng được tối đa các chức năng của máy tính trong giải toán. Nay tôi xin giới thiệu một số phương pháp tìm nghiệm bằng chức năng SOLVE của máy tính. Bài viết được viết với máy fx-570ES và tôi cũng khuyên các em tập làm quen sử dụng máy này trong quá trình giải toán.

VD1. Tìm nghiệm cố định: $2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax - 4 = 0$ (1)

Giải:

Soạn phương trình (1) vào máy tính. $2x^3 - 3(A+1)x^2 + 6Ax - 4 = 0$. Dấu = soạn bằng cách nhấn: ALPHA + CALC

Nhấn tiếp: Shift + SOLVE

Sau đó, máy hỏi: A=? ta cho ngẫu nhiên A=2 rồi nhấn phím =

Tiếp đến, dựa vào "linh cảm" mạch bảo, ta đoán $x=-3$, nhấn tiếp phím =

Máy hiện nghiệm $x=0.5$. Ta ghi nghiệm này ra giấy. Có thể đây sẽ là nghiệm cố định cần tìm??!!

Nhấn tiếp Shift + SOLVE với A=2

Lần này ta thử với $x=10$

Máy hiện $x=2$.

Thay A=-3;4;5.. và làm tương tự ta chỉ thấy máy báo $x=2$

Vậy ta kết luận $x=2$ là nghiệm cố định.

Đây chính là cách tìm nghiệm cố định trong bài tập ở trang 35

VD2. Tìm m sao cho: $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 2(m^2 + 4m + 1)x - 4m(m+1)$ cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ >1

Giải:

Soạn phương trình $x^3 - 3(A+1)x^2 + 2(A^2 + 4A + 1)x - 4A(A+1) = 0$ vào máy và nhấn Shift + SOLVE.

Máy hỏi giá trị của A. Ta cho $a=3$

Tại lại tiếp tục đoán nghiệm $x=-5$

Máy hiện $x=1.732281591$. Ta không quan tâm đến nghiệm này vì đây là nghiệm "xấu". Mục đích của ta là tìm nghiệm hữu tỉ để phân tích thành nhân tử. Nhấn tiếp Shift + SOLVE.

Lần này ta cho A=9 và $x=10$

Máy hiện $x=10$. Ta ghi nhận nghiệm này

Với A=9 cho $x=-5$ ta nhận được kết quả $x=2$

Thử tương tự với A bằng 1 vài giá trị và thế $x=2$, $x=10$ vào ta đều nhận được thông báo $x=2$. Vậy $x=2$ là nghiệm cố định của phương trình.

VD3. Giải phương trình: $\sin 2x + \cos 2x - \cos x + 3\sin x = 2$ (1)

Giải:

Lúc này "lí trí" mạch bảo ta rằng. Cần phân tích phương trình về phương trình tích. Hơn nữa, phải có nghiệm "đẹp" mới có thể phân tích được. Ta dùng Shift + SOLVE để tìm nghiệm này.

Nhập phương trình trên vào máy

Nhấn Shift + SOLVE.

Ta lần lượt thử x bằng các góc đặc biệt như: $\pm \frac{\pi}{3}; \pm \frac{\pi}{6}; \pm \frac{\pi}{2} \dots$

Khi thử đến các nghiệm là $\frac{\pi}{2}$ và $\frac{\pi}{6}$ thì máy hiện rất nhanh. Để kiểm tra ta nhấn: sin(_ ALPHA _X_)

Máy hiện $=1$ và $=\frac{1}{2}$. Và nếu coi $\sin(x)$ là biến thì có thể phân tích phương trình qua 2 nhân tử là

$(\sin x - 1)$ hay $(2\sin x - 1)$. Ta chọn phân tích theo hướng $(\sin x - 1)$.

$$(1) \Leftrightarrow 3\sin x - 3 + 1 - \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(\sin x - 1) + 1 + (1 - 2\sin^2 x) + \sin 2x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(\sin x - 1) + 2(1 - \sin^2 x) + \sin 2x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - 1)(1 - 2\sin x) + 2\sin x \cos x - \cos x = 0$$

$$(\sin x - 1)(1 - 2\sin x) + \cos x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow (\sin x - 1)(1 - 2\sin x + \cos x) = 0$$

Đến đây, ta đã hoàn thành được ý đồ đưa phương trình đầu tiên về phương trình tích. Việc giải phương trình đầu giờ đây đã trở nên dễ dàng.

GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC GIẢI TÍCH BẰNG MÁY TÍNH BỎ TÚI FX - 570ES

Câu 1: Trong Oxyz cho: $d_1: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 \end{cases}$; $d_2: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$

a) Tính khoảng cách giữa d_1 và d_2 .

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2 .

Giải:

Để sử dụng chức năng vectơ của máy ta nhấn: MODE + 8 (vector)

Chọn vectơ A máy hỏi ta chọn hệ vectơ nào (**Vct A(m) m?**)

Chọn 1:3

Nhập tọa độ vectơ chỉ phương của d_1 . (2;1;0) Nhấn tiếp Shift + STO + B để copy các thông số của vectơ A vào vectơ B.

Sửa tọa độ của vectơ B thành (0;1;-1)

Ta có $M(2;-1;0) \in d_1$; $N(1;1;3) \in d_2 \Rightarrow \overrightarrow{MN}(-1;2;3)$ (Bước này ghi ra giấy)

Nhấn Shift+5(vector) → Nhấn 1 (Dim) → 3(Vct C) sau đó nhập thông số của vector $\overrightarrow{MN}(-1;2;3)$

a) Theo công thức: $d_{(d_1; d_2)} = \frac{\left| \left[\overrightarrow{d_1}; \overrightarrow{d_2} \right] \cdot \overrightarrow{MN} \right|}{\left| \left[\overrightarrow{d_1}; \overrightarrow{d_2} \right] \right|}$ tương ứng với: $\frac{\left| \left[\overrightarrow{A}; \overrightarrow{B} \right] \cdot \overrightarrow{C} \right|}{\left| \left[\overrightarrow{A}; \overrightarrow{B} \right] \right|}$ là các vec tơ được lưu trong máy

tính.

Để tính tích có hướng của hai vectơ $\overrightarrow{A}$ & $\overrightarrow{B}$ ta nhấn: ON → Shift+5 → 3(vct A) → x → Shift+5 → 4 → =

Để tính độ dài vector ta dùng chức năng ABS(. bằng cách nhấn phím Shift+hyp

Để tính tích vô hướng $\overrightarrow{A}$ & $\overrightarrow{B}$ của ta nhấn ON → Shift+5 → 3(vct A) → Shift+5 → 7:•(dot) → Shift+5 → 4(vct B) → =

Vậy nên để tính độ dài cần tìm ta soạn vào màn hình máy tính như sau:

$$(\text{Abs}((\text{VctAxVctB}) \bullet \text{VctC})) \div (\text{Abs}(\text{VctAxVctB}))$$

Kết quả máy hiện: $\frac{11}{3}$.

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2 :

Việc đầu tiên cần làm đó là ta phải tìm 1 vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) . gọi vector pháp tuyến

$$\text{cần tìm là } \vec{a} \text{ ta thấy: } \begin{cases} \vec{a} \perp \vec{d_1} \\ \vec{a} \perp \vec{d_2} \end{cases} \quad (\vec{d_1} = \vec{A}; \vec{d_2} = \vec{B})$$

Nên $\vec{a}$ cần tìm là $[\vec{d_1}; \vec{d_2}]$. Để tìm $\vec{a}$ bằng máy tính ta làm như sau:

ON $\rightarrow$ Shift+5 $\rightarrow$ 3 (vct A) $\rightarrow$ x $\rightarrow$ Shift+5 $\rightarrow$ 4 $\rightarrow$ =

Màn hình soạn thảo hiện như sau:

VctAxVctB nhấn phím = để xem kết quả

Máy hiện: Vct Ans (-1;2;2)

Vậy $\vec{a} = (-1; 2; 2)$. Mp (α) đi qua M(2;-1;0)

$$\text{Nên } (\alpha): -(x-2) + 2(y+1) + 2(z) = 0 \Leftrightarrow -x + 2y + 2z + 3 = 0$$

Thí sinh chỉ cần ghi các bước làm vào bài làm, công việc còn lại hãy để cho máy tính. Ta thấy hoàn thành 1 bài hình học giải tích trong đề thi thật nhẹ nhàng.

Các bạn có thể thử làm các bài toán có lời giải trong sách giáo khoa hình học 12 hay trong các sách tham khảo bằng chiếc máy tính của mình. Sẽ có nhiều bất ngờ đang chờ các bạn khám phá!

SƠ ĐỒ HORNER VÀ ỨNG DỤNG:

Chia đa thức $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ cho $(x-c)$ ta có:

$$P(x) = (x-c)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-1}x + b_n)$$

Trong đó $b_i (i=0; 1; 2; 3; \dots; n)$ định bởi sơ đồ Horner:

	a_0	a_1	a_2	a_3	...	
c	b_0	$b_1 = cb_0 + a_1$	$b_2 = cb_1 + a_2$	$b_3 = cb_2 + a_3$	...	$b_i = cb_{i-1} + a_i$

Áp dụng:

VD1. Tính thương và số dư trong phép chia:

$$P(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 \text{ cho } x+2$$

Giải:

Ta có sơ đồ Horner:

	2	1	-8	-1	6
-2	2	-3	-2	3	0

$$\text{Vậy } P(x) = (x+2)(2x^3 - 3x^2 - 2x + 3) + 0$$

Đến đây, chúng ta đã hiểu phần nào công dụng của sơ đồ horner. Trong bài toán liên quan đến tham số, việc tìm được nghiệm cố định và phân tích thành tích sẽ làm công việc giải toán nhẹ nhàng rất nhiều. Nghiệm cố định đã có máy tính, còn việc chia đa thức: Hãy để sơ đồ Horner làm cho bạn.

Ta quay lại với ví dụ đầu phần phụ lục:

$$\text{VD2.} \quad \text{Phân tích thành tích: } 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax - 4 = 0 \quad (1)$$

Giải:

$$2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax - 4 = 0 \quad \text{Ta đã có được nghiệm cố định } x=2. \text{ vậy nên}$$

	2	$-3(a+1)$	6a	-4
2	2	$-(3a-1)$	2	0

Vậy (1) $\Leftrightarrow (x-2)[2x^3 - (3a-1)x + 2] = 0$

Đây chính là một phần trong bài làm ở Bài 3 ở trang 35.

VD3. Định m để phương trình: $mx^3 - (3m-4)x^2 + (3m-7)x - m + 3 = 0$ (A)

có 3 nghiệm dương phân biệt.

Giải:

Ta dễ dàng nhận ra: $a+b+c+d=0 \Rightarrow$ phương trình (A) có 1 nghiệm $x=1$

Sơ đồ Horner:

	m	$-3m-4$	$3m+7$	$-m+3$
1	m	$-2(m-2)$	$m-3$	0

Nên (A) $\Leftrightarrow (x-1)[mx^2 - 2(m-2)x + m-3] = 0$

(A) Có 3 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = mx^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt đều khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-2)^2 - m(m-3) > 0 \\ S = \frac{m-2}{m} > 0 \\ P = \frac{m-3}{m} > 0 \\ g(1) = m - 2(m-2) + m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; 0) \cup (3; 4)$$

VD4. Định m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt:

$$x^3 - 1 - m(x-1) = 0 \quad (1)$$

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow x^3 - mx + m - 1$$

Dùng máy tính ta "mò" được nghiệm: $x=1$

Sơ đồ Horner:

	1	0	-m	m-1
1	1	1	1-m	0

Vậy (1) $\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1 - m) = 0$

(1) Có 3 nghiệm phân biệt: $g(x) = x^2 + x + 1 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 4m - 3 > 0 \\ g(1) = 1 + 1 + 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{3}{4} \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{4} < m \neq 3$$

Sơ đồ Horner ứng dụng rất nhiều trong giải toán, nhất là dạng toán liên quan đến khảo sát hàm số. Các bạn nên tập sử dụng sơ đồ này một cách thuần thục. Bài tập áp dụng tôi sẽ nêu lên 2 bài dạng chia đa thức nhằm giúp các bạn hoàn thiện kĩ năng.

TÍNH SƠ ĐỒ HORNER BẰNG MÁY TÍNH BỎ TÚI:

Để tiện tính nhanh sơ đồ Horner ở ví dụ 3, ta sử dụng cách “liên hoàn bấm” đã giới thiệu sơ lược trong chương Số Phức! Cách làm như sau:

Coi tham số m là số i trong hệ số phức, Ta viết hệ tính số phức bằng **Mode_2:CMPLX**

	i	$-3i+4$	$(3i-7)$	$-i+3$
1	i	α	β	μ

α ; β ; μ là các số cần điền. Đầu tiên ta nhấn i =. Để lưu vào biến nhớ Ans. (gọi i bằng cách vào Mode_CMPLX → nhấn SHIFT_ENG)

Sau đó ta soạn tiếp vào màn hình:

Ans_x_1+_A

Nhấn tiếp CALC. Máy hỏi A? ta nhập vào: $-3i+4$ rồi nhấn =. Được $4-2i$, ta ghi kết quả vào vị trí α .

Bấm CALC máy hỏi tiếp A?: ta nhập vào: $(3i-7)$ nhấn = ta được $-3+i$ ta ghi kết quả vào vị trí β .

Bấm CALC máy hỏi tiếp A?: ta nhập vào: $-i+3$ nhấn = ta được 0 ta ghi kết quả vào vị trí μ .

Tiếp tục làm như vậy cho đến hết. ta được sơ đồ Horner hoàn thiện.

Khi được sơ đồ Horner với i , ta chỉ việc thay i bằng m .

Cách làm trên rất hữu ích với dạng bài khảo sát hàm số. Các bạn hãy thử thực hiện với các bài tập khác

BÀI TẬP:

Bài 1. Nếu $x=-m$ là một nghiệm của phương trình $x^3-4mx^2+m^2x+6m^3=0$. Hãy tìm nghiệm còn lại.

Bài 2. Cho biểu thức: $(Q)=2x^5+3x^4-x^3-7x^2+11x+9$

a. Tính giá trị biểu thức tại $x=3$

b. Tìm thương của phép chia (Q) cho $x-3$

Gợi ý: Dư số của phép chia (Q) cho $x-3$ là giá trị của $Q(3)$.

GIẢI BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN THUẦN TÚY BẰNG MÁY TÍNH CASIO FX-570ES:

Bài toán: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ với $AB=a$; $BC=\sqrt{2}a$; $CA=\sqrt{3}a$; $BB'=\sqrt{5}a$. Tính thể tích $ABC.A'B'C'$.

Giải:

Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $BB' \perp (ABC)$

$$\Rightarrow V = S.h = S_{ABC} \cdot BB'$$

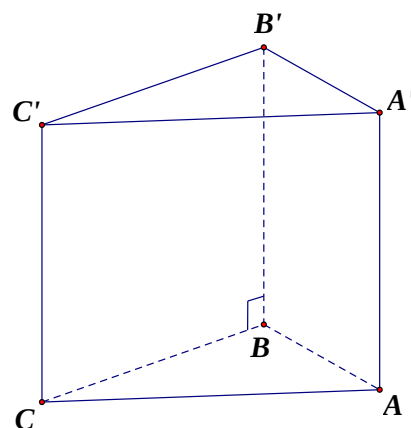
Theo công thức Heron: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$AB=a; \quad BC=\sqrt{2}a; \quad CA=\sqrt{3}a; \quad BB'=\sqrt{5}a$$

$$\text{Vậy nên: } S_{ABC} = \frac{\sqrt{2}a^2}{2} \quad V = S \cdot BB' = \frac{\sqrt{2}a^2}{2} \cdot \sqrt{5}a = \frac{\sqrt{10}a^3}{2} \quad (\text{đvtt})$$

Lời bình:

Ở ví dụ trên, các bạn tính diện tích tam giác ABC bằng cách nào? Đó là một tam giác thường, với 3 cạnh cho sẵn, chỉ có thể tính S bằng công thức heron. Nhưng nếu bạn tính theo Heron với biến a , bạn sẽ đối mặt với việc khai triển và thu gọn một biểu thức không phải là dễ chịu chút nào. Làm sao có thể có kết quả ngắn gọn như bài trên Thời gian không



đợi ta.... Chẳng lẽ chịu bó tay?

Vũ khí của chúng ta chính là chiếc máy tính casio fx-570es...

Ta tiến hành giải bài toán trên bằng máy tính như sau:

Bước 1: coi như không thấy chữ a. Ta lưu các hệ số đứng trước a vào các biến A,B,C trên máy tính..

1 _Shift_STO_A

$\sqrt{2}$ _Shift_STO_B

$\sqrt{3}$ _Shift_STO_C

Lúc này, các biến A,B,C trên máy đã có giá trị tương ứng là: 1; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$. Đó chính là 3 cạnh của tam giác.

Ta tính tiếp giá trị của nửa chu vi. Soạn vào màn hình máy tính:

$\frac{A+B+C}{2}$ _Shift_STO_D

Lúc này giá trị của D chính là nửa chu vi. Nếu có ra giá trị lẻ, bạn hãy bình tĩnh và tiếp tục công việc...

Ta ráp các biến này theo công thức heron: Soạn vào màn hình máy $\sqrt{D(D-A)(D-B)(D-C)}$ rồi nhấn =

Ta có nhận được kết quả: $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Viết kết quả này ra giấy và thêm a^2 phía sau kết quả này và được $\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$

Đây chính là diện tích cần tìm. Từ đó tính thể tích không khó!

Trên đây mới là ví dụ đơn giản nhất của thuật toán "quy đổi" và tính toán bằng máy tính fx570es. Ta cùng đến với VD2:

VD2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN đối với DM. biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.CDMN và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

Giải:

➤ Thể tích khối chóp SCDMN.

$$S_{CDMN} = S_{ABCD} - S_{AMN} - S_{BCM}$$

$$= AB^2 - \frac{1}{2} AM \cdot AN - \frac{1}{2} BC \cdot BM$$

$$= a^2 - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}$$

$$\Rightarrow V_{S.CDNM} = \frac{1}{3} S_{CDNM} \cdot SH = \frac{5\sqrt{3}a^3}{24}$$

➤ $d(DM; SC)$

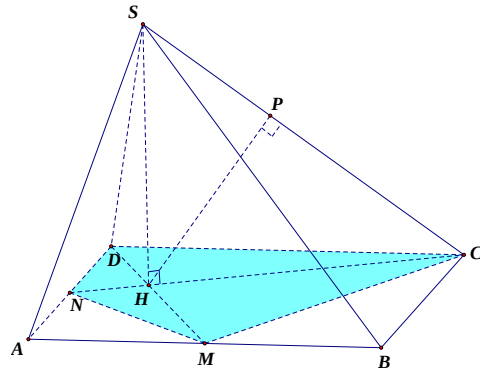
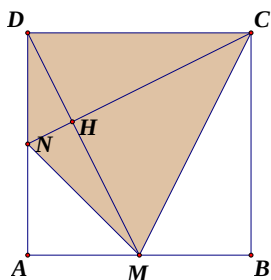
$$\triangle ADM = \triangle DCN \Rightarrow \angle ADM = \angle DCN \Rightarrow DM \perp CN \text{ và } DM \text{ vuông góc với } SH$$

$$\text{Suy ra } DM \perp (SHC)$$

Hạ HP vuông góc SC ($H \in SC$) suy ra HK là đoạn vuông góc chung của DM và SC, do đó:

$$d(DM, SC) = HK$$

$$DM = CM = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$



$$\frac{DH}{DA} = \frac{DN}{DM} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow DH = \frac{\sqrt{5}}{5}a$$

$$HC = \sqrt{DC^2 - DH^2} = \frac{2\sqrt{5}a}{5}; \quad SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \frac{\sqrt{95}a}{5}$$

$$SH.HC = SC.HP \Rightarrow HP = \frac{SH.HC}{SC} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{5}a}{5}}{\frac{\sqrt{95}a}{5}} = \frac{2\sqrt{57}}{19}a.$$

Lời bình: Ta mất gần 10' để vừa tính toán vừa trình bày ra giấy một đề thi đại học khối A năm 2010! Ở bài trên cũng như các bài hình học sau này, Các bạn xem như "không thấy a " và dùng hệ số phía trước a rồi tính bằng máy tính. Tính xong, nếu là tính khoảng cách, độ dài... thì thêm a ra sau kết quả; nếu tính diện tích ta thêm a^2 sau kết quả. Nếu tính thể tích thì thêm a^3 ra sau số vừa tính được. Tính đến đâu ghi kết quả ra giấy đến đó. Khi nhìn ra được cách tính rồi, việc tính toán dù phức tạp đến đâu cũng đã có máy tính làm cho bạn!

Mục Lục

Bài I: Ứng dụng phương trình đường thẳng để giải phương trình căn thức.	2
Nhắc lại kiến thức về đường thẳng.	2
Ứng dụng	2
Bài tập tự luyện	4
Bài II: Các cách giải phương trình và bất phương trình vô tỉ.	5
Lũy Thừa.....	5
Phương pháp đặt ẩn phụ:	7
LOẠI III: HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐA THỨC	9
Bài tập tự luyện	11
Bài III: Phương trình lượng giác.	12
Một số công thức lượng giác cần nhớ:	12
Cách giải các phương trình lượng giác trong đề thi đại học:	13
Bài tập tự luyện	17
Bài IV: Tích Phân	17
NGUYÊN TẮC CHUNG ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN TÍCH PHÂN:	18
PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN:	21
Bài V: Các bài toán liên quan đến ứng dụng của đạo hàm và đồ thị hàm số.	27
I: SỰ TĂNG GIẢM CỦA HÀM SỐ:	27
II: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ	29
III: SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA HAI ĐỒ THỊ.....	37
DẠNG TOÁN: HỌ ĐƯỜNG CONG TIẾP XÚC VỚI MỘT ĐƯỜNG CỖ ĐINH	41
CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN CHU VI VÀ DIỆN TÍCH.....	43
Bài tập tự luyện	44
Bài VI: Một số dạng toán khác cần lưu ý.	46
I/ Giới hạn:.....	46

II/Phương trình và bất phương trình mũ và logarit:.....	47
Bài VII: SỐ PHỨC.....	49
Phần I: KIẾN THỨC CẦN NHỚ:	49
Phần II: GIẢI ĐỀ THI:	50
PHỤ LỤC: MỘT SỐ ĐỀ THI CẦN THAM KHẢO (Theo cấu trúc đề thi của Bộ GD&ĐT 2010).....	57
ĐỀ 1:.....	57
ĐỀ 2:.....	58
ĐỀ 3:.....	59
ĐỀ 4:.....	60
ĐỀ 5:.....	61
ĐỀ 6:.....	62
ĐỀ 7:.....	63
ĐỀ 8:.....	64
ĐỀ 9:.....	65
ĐỀ 10:	66
ĐỀ 11:	67
ĐỀ 12:	68
PHỤ LỤC II: Cách giải nhanh bài toán bằng máy tính bỏ túi.	69
GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC GIẢI TÍCH BẰNG MÁY TÍNH BỎ TÚI FX – 570ES.....	70
SƠ ĐỒ HORNER VÀ ỨNG DỤNG:.....	71
TÍNH SƠ ĐỒ HORNER BẰNG MÁY TÍNH BỎ TÚI:	73
GIẢI BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN THUẦN TÚY BẰNG MÁY TÍNH CASIO FX-570ES:	73

